

仲上三分布（ n, q, m 分布）への歴史探訪

唐沢好男

本レポートでは、仲上稔が昭和の激動期、現在の移動通信の伝搬モデルにも生き続ける3つの分布（ n, q, m 分布）を生み出した原著論文に立ち返り、その歴史を探訪する。また、独立に研究が行われ、同形の分布を後に提案した Bell 研の S. O. Rice と R. S. Hoyt の論文にも触れたい。理論的な考察から生み出された n 分布と q 分布、短波のフェージングデータから経験的に見出された m 分布、この三つの分布の強い関連性を見てみよう。【TR-YK-076 (March 2023)の小修正版】

1. はじめに

太平洋戦争に翻弄された昭和の激動期（1930年代後半から1940年代）、国際電気通信株式会社（付録1）の技術職員の仲上稔氏（以下敬称略）は勤務地であった福岡受信所（埼玉県福岡村：現在のふじみ野市）内の実験室において、短波の受信技術の研究開発を行っていた（付録2）。その執念ともいえる努力によって、現代の GHz 帯移動伝搬（マルチパスフェージング）の基本モデルとして生き続けている三つの確率分布を編み出している。仲上の **n 分布** ([1] 1940年)・ **q 分布** ([2] 1942)・ **m 分布** ([3] 1943)である。 n 分布は、後に同形の分布を独立に導いた米国 Bell 研究所の S. O. Rice を含めて、現在は**仲上-ライス分布**と呼ばれている。同様の事情により、 q 分布も Bell 研の R. S. Hoyt を含めて、**仲上-ホイット分布**と呼ばれている。 n 分布と q 分布は純粋な理論的考察から、 m 分布は短波のフェージングデータに見られる統計的な性質から経験的に見出されたものであるが、仲上自身の手によって、これら三つの分布には、理論的な意味で、深い関係があることが示されている[4]。

ちなみに、分布の呼び名、 n, q, m については、[4]の中で、分布の関係を述べる際の区別として仮につけたものであることが記されている。国際学会の世界では、仲上の知名度は m 分布にあり、**Nakagami distribution** というと m 分布を指す。これは、 n 分布や q 分布のように Rice や Hoyt との分布の被りもなく（共に、論文公表は仲上のほうが早いのであるが）、唯一の提唱者であることに加え、本レポートの m 分布の節で述べるように、極めて広い範囲のフェージングに良い近似を与え実用的に優れているからである。（加えて、英語による解説論文 ([5] 1960) としてまとめられていることも大きい）

本レポートでは、これら3つの分布を生み出した原著論文[1]~[3]に立ち返り、その歴史を探訪したい。なお、仲上（等）の論文は、上述のもの以外にも受信技術やダイバーシチ技術を含めて多岐に亘っており、それらの全体は、研究開発の一段落時に作成された技術報告書 ([6] 1947) に詳しくまとめられている。本レポートはこれら[1]~[6]をもとに、上記三つの分布を、分布が

生まれた歴史の順 (n→q→m) にまとめている。

2. n 分布

2. 1 不規則位相問題

送信局から出た電波が、途中の媒質の不規則性によって多数に分岐して受信局に到来する波は、現代の言葉で言えば**マルチパス波**である。又、そのマルチパス波をアンテナで受信した結果として生まれる信号強度の時間変動が**フェージング**である。一つ一つの波（素波）の振幅と位相をそれぞれ、 r_i, θ_i ($i=1, 2, \dots, N$) とすると、合成信号 a の振幅（包絡線） r は次式で表される。

$$a = r_1 e^{j\theta_1} + r_2 e^{j\theta_2} + \dots + r_N e^{j\theta_N} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} r &= |a| \\ &= \sqrt{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + \dots + r_N \cos \theta_N)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + \dots + r_N \sin \theta_N)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^N r_i r_{i'} \cos(\theta_{i'} - \theta_i)} \end{aligned} \quad (1b)$$

短波通信はもとより、GHz 帯の移動通信においても、マルチパスを構成する素波は振幅の変動よりは位相の変動のほうが大きいので、モデル化に際しては、振幅一定の下、位相がランダムに変動する現象、すなわち、フェージングを不規則位相問題として捉える。このときの受信信号振幅 r の確率分布を、様々な条件のもとで、理論的に求めようとしたのが仲上の研究であり、その結果として得られた分布が、n 分布と、次章で述べる q 分布である。この種の理論解析には確率分布に関する基礎知識が必要である。仲上が用いた方法は**ハンケル変換形特性関数**を用いる確率分布の手法であり、筆者の技術レポート[7]にその概要をまとめている。本節では、それをベースとして、n 分布誕生の大筋の流れを追うことにしたい。

2. 2 n 分布の導出

まずはその解析手段であるハンケル変換形特性関数の話から入る。

確率変数の実現値を r 、確率密度関数 (PDF) を $f(r)$ とする。この確率密度関数を次のように積分変換するのがハンケル変換形特性関数 $g(k)$ である (注: 変数や関数に与えている文字は、原著論文と異なるものが多いが、原則[7]に合わせている。例: $R \rightarrow r, \lambda \rightarrow k$)。

$$g(k) \left(\equiv \langle J_0(rk) \rangle \right) = \int_0^\infty f(r) J_0(rk) dr \quad (2)$$

これを次式により逆変換すると、

$$f(r) = r \int_0^\infty g(k) k J_0(rk) dk \quad (3)$$

となり、元の確率密度関数に戻る（詳細は[7]の付録1参照）。なお、ハンケル変換形特性関数の形についてはこれ以外にもいくつかの変形があるが、ここでは、この形を用いている。累積分布関数（CDF） $F(r)$ は次式である。

$$F(r) \left(= \int_0^r f(r) dr \right) = r \int_0^\infty J_1(kr) g(k) dk \quad (4)$$

一般に、確率変数の和の分布を求めるような際には、フーリエ変換あるいはラプラス変換形の積分変換による特性関数がよく用いられるが、式(1b)のような包絡線変動の分布を求めたい場合には、この後示すようにハンケル変換形特性関数が都合がよい。

素波の振幅が一定で、位相が $0 \sim 2\pi$ で一様であるとする、 $N=1$ の場合の振幅と位相の結合確率密度関数 $f_{r\theta}(r, \theta)$ は $\delta(r-r_1)/(2\pi)$ (δ : Dirac のデルタ関数、 r_1 :素波の振幅) なので、

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^\infty J_0(kr) \int_0^{2\pi} f_{r\theta}(r, \theta) d\theta dr \\ &= \int_0^\infty J_0(kr) \delta(r-r_1) dr = J_0(kr_1) \quad (N=1) \end{aligned}$$

$N=2$ の場合も、導出は多少煩雑になるが次式になる（[7]の付録1）。

$$g(k) = J_0(kr_1) J_0(kr_2) \quad (N=2)$$

この形から予想されるように、任意の N に対して次式が得られている（Kluyver, 1906）。

$$g(k) = J_0(kr_1) \times J_0(kr_2) \times \cdots \times J_0(kr_N) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (5)$$

これが、マルチパス波合成信号の包絡線分布の導出にハンケル変換形特性関数を用いることのメリットになる。確率密度関数は(5)式を(3)式に代入することにより、

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \quad (6)$$

として求められる。因みに、 $N=3$ までは、確率密度関数が閉形式で求められている（ $N=3$ では特殊関数を含んで結構複雑な形[7]）。

さらに、 N が十分大きく、それぞれの素波の大きさが同程度（＝特段の大きな差がない）であれば、特性関数は次式の近似式で表される（[7]の付録1）。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \approx \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad 2\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^N r_i^2 \quad (7)$$

確率密度関数は

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

となり、レイリー分布になることが分かる。仲上は、式中の積分を解くのに Watson の Bessel

Function の公式集を使ったことが記されているが、今では、岩波の数学公式 III [8]が利用できる。

仲上は、この状態に対して、一つだけ強い波（振幅 r_0 ）が加わった場合を考えた。この発想が n 分布誕生の原点である。この環境は以下のように表される。

$$g(k) = J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} f(r) &= r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_0) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

この積分の解法もベッセル関数の公式集や岩波の数学公式 III に出ている公式を使うことができる。式(10)の最終辺で表される分布が **n 分布**である。

分布の形は r_0 と残りの波全体の電力比 $r_0^2/(2\sigma^2)$ で決まる。この比はこの後述べるライスの名前を冠した **ライスファクタ** と呼ばれ、文字は K で表すことが多い。図 1 は r_0 も含めた全電力を 1 に正規化したとき ($r_0^2 + 2\sigma^2 = 1$) の確率密度関数を K をパラメータにして表している。当然ながら、 r_0 の比率が大きい (= K の値が大きい) ほど、フェージングの変動幅が小さくなる。現在の視点において、移動通信のマルチパス環境として見れば、振幅 r_0 の直接波に不規則な散乱波が加わった環境、すなわち、見通し内 (LOS) 伝搬環境を表すフェージングのモデルになる。また、 $r_0=0$ とすれば、レイリー分布になり、見通し外 (NLOS) を含んで幅広い伝搬環境を表す確率分布である。

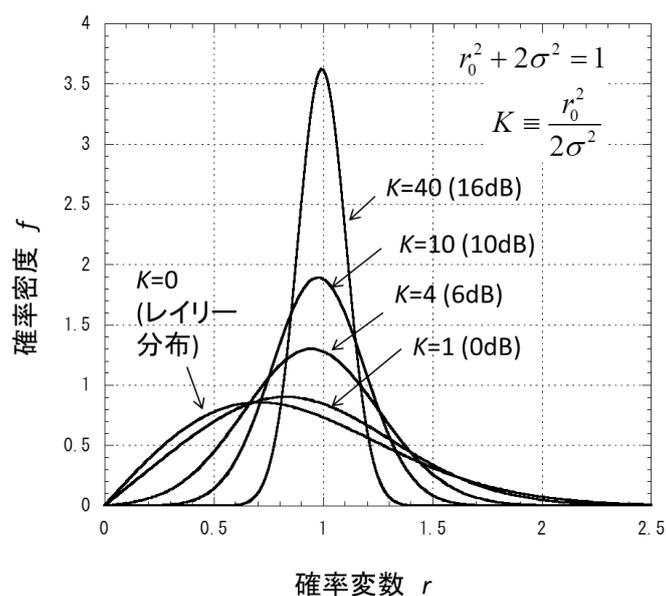


図1 n分布の計算例

このように大筋の流れでまとめてしまうと、いともたやすく(10)式にたどり着いたように感じられると思うが、決してそうではない。原著論文[1]と、その前篇である[9]、[10]からは、フェージングの特性解明を目指して、その方法が雲をつかむような段階であったところから、困難な道を自ら切り開いて行った苦闘の跡を読み取ることができる。[9]では先人の確率関数理論に習い、以降で行うフェージング解析の道具立てを行っている。[10]では、主に、位相差が一定で振幅のみが不規則に変動する多数の波の合成の理論解析を行っている。そして、[1]では、振幅が一定で位相のみが不規則に変動する多数の波の合成問題に土俵を移し、ついに、n分布という新しい確率分布を手に入れることができたのである。n分布誕生の歴史に興味を持たれた読者は、是非、これら原著論文にも目を通し、その雰囲気味わってほしい(大学の図書館などには古い学会誌も保管されている)。電磁気学を完成させたマクスウェルの大著「電気磁気論(1873)」がそうであったと聞かすが、我々は後にそれを整理したヘビサイドの4つの方程式で学ぶので、電磁気学の理解も容易になっている。開拓者の論文は野戦病院さながらで、必ずしも目的に向かって一直線でないところに、その意を受け止めることの難しさを感じるのである。

2. 3 ライスの研究と仲上-ライス分布

仲上がn分布の論文を発表したのが1940年、その遅れること5年、米国のBell研のS. O. Riceが、雑音理論を研究する過程において、通信信号に雑音に加わった信号の振幅の確率分布として同じ式

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

を導いている[11]。この論文は一つの論文が二つに分けられ、上式はその後編(1945)に載っている。

ここで、ライスの導出を見てみよう。ライスの場合は、信号と雑音の関係なので、図2のようにモデル化ができる。信号成分(振幅 r_0)を実軸方向(便宜上、実軸を x 軸、虚軸を y 軸と置く)にとるとき、これに、平均電力 σ^2 の x, y 独立な2次元ガウス雑音に加わったモデルである。両成分の確率密度関数は、 x 成分に対して $N(r_0, \sigma^2)$ 、 y 成分に対して $N(0, \sigma^2)$ で表される。 $(N(r_0, \sigma^2))$ は平均値 r_0 、分散 σ^2 の正規分布を簡易に表す記法)

変数 x, y の結合確率密度関数 $f_{xy}(x, y)$ は

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x)f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-r_0)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

であり、これを極座標変換して、 $f_r(r, \theta)$ を求めると、

$$f_{r\theta} = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 - 2r_0r \cos \theta + r^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{r_0r \cos \theta}{\sigma^2}\right)$$

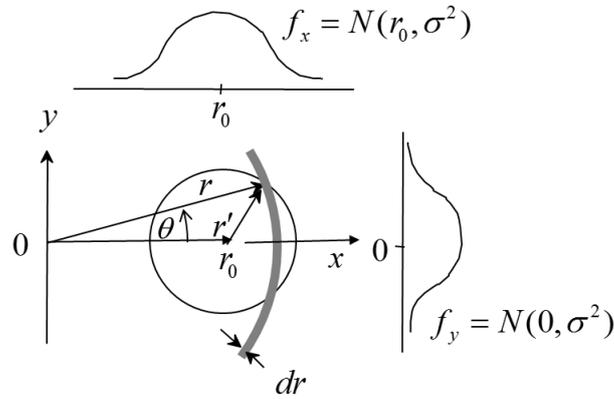


図2 信号 (r_0) と雑音 (r') の合成振幅 (r) のモデル

となる。これより、振幅 r の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \int_0^{2\pi} f_{r\theta}(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0r}{\sigma^2}\right) \quad \left(\because I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \phi} d\phi\right) \quad (11) \end{aligned}$$

となる。積分は変形ベッセル関数 I_0 の積分表示を用いて直ちに得られる。これが、ライスの方法による分布の導出である。方法だけ比べるとライスの方法の方が考え方も、数式変換も素直でわかりやすい。それゆえ、大学等の授業においては、この方法で分布を学んでいることと思う。

雑音理論の権威であるライスが世界的に定評のある Bell 研の技術雑誌 BSTJ で発表したのも、欧米では、これが仲上論文より先に知られ、この分布は **ライス分布** (Rice distribution, Rician distribution) の名で世に広まっていった。その後、我が国の先人たちは、特に、国際無線通信の標準化会合 (当時の CCIR) の場などにおいて、仲上の先着権をその折々に主張し、現在では **仲上-ライス分布** の名前が定着しつつある。現行の ITU-R 勧告 (Rec. ITU-R. P. 1057) では、分布の名前が Nakagami-Rice distribution で定義されている。しかし、国際学会の発表や論文誌、あるいは英語版 Wikipedia などでは、今なお、ライス分布と呼ばれることが多く楽観できる状況でもない。筆者も、せめて日本人くらいはと思って、常に仲上-ライス分布と呼んでいるが、あるとき論文で使ったら、使ってもよいが注釈を入れるとコメントされたこともある。上記の経緯を踏まえば、この分布を仲上-ライス分布と呼ぶのに正統的な根拠があり、是非、皆さんも、積極的にこの名前を使ってほしい。

さはさりながら、このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的、異なる手法で、後の時代の移動伝搬モデルの基本式：仲上-ライス分布が生まれたことは大変興味深い。

3. q 分布

3. 1 q 分布の前提条件と分布の導出

q 分布は、仲上・佐々木により、1942 年に発表されている[2]。レイリー分布や n 分布では、(1)式において、位相の変化範囲が 2π を越え、位相分布として $0\sim 2\pi$ で一様な場合を想定したが、ここでは、その変化幅が π に比べて狭いような環境を考える。それがどういう伝搬環境で生まれるかについては最後に考察するが、先ずはこの条件での確率分布の導出を行う。

これは言うは易く難しい問題である。具体的にいろいろの条件を仮定しなければとても解けそうにないし、解けたとしてその解釈の問題もある。正直言って、原著論文[2]をわかりやすく解説する力が筆者にはない。幸い、技術報告書[6]には、導出手順が見えるように整理してまとめられているので、以下では、[6]に基づき、その大筋を示したい。(式の導出手順や式の詳しい説明は省いているので、それを知りたい読者は[2]または[6]を見てほしい)。

出発点を以下のように置く。

$$x = \sum_{i=1}^N r_i \cos \theta_i, \quad y = \sum_{i=1}^N r_i \sin \theta_i$$

素波の位相 θ_i は、 ${}_0\theta_i$ を中心に比較的狭い範囲で動くものとする。2変数 μ, ν のハンケル変換形特性関数により、振幅 r の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(r\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right) \prod_{i=1}^N g_i(\mu, \nu) d\mu d\nu \quad (12)$$

$$g_i(\nu, \mu) = \int_{\theta_{i,\min}}^{\theta_{i,\max}} f_{\theta_i}(\theta_i) \exp\{-j(\mu \cos \theta_i + \nu \sin \theta_i)r_i\} d\theta_i \quad (13)$$

ここで、 f_{θ_i} は、変数 θ_i の確率密度関数である。

上式は変数 μ, ν の十分小さな範囲だけを考えても十分な近似が得られるため、 r_i に大きな差が無く、かつ、 N が十分大きければ、次式の近似が成り立つ。

$$\prod_{i=1}^N g_i(\mu, \nu) \approx \exp(-jA_{10}\mu - jA_{01}\nu - 2A_{11}\mu\nu - A_{20}\mu^2 - A_{02}\nu^2) \quad (14)$$

ここで、係数 $A_{10}\sim A_{02}$ の各値は次式で与えられるが、素波の数 N が十分大きく、かつ、 ${}_0\theta_i$ が各象限に均等に分配されている場合、 A_{10}, A_{01}, A_{11} は0と見なしてもよいであろう。

$$A_{10} = \sum_{i=1}^N r_i \langle \cos \theta_i \rangle \cos {}_0\theta_i \approx 0 \quad (15a)$$

$$A_{01} = \sum_{i=1}^N r_i \langle \cos \theta_i \rangle \sin {}_0\theta_i \approx 0 \quad (15b)$$

$$A_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \sin 2_0 \theta_i \approx 0 \quad (15c)$$

$$A_{20} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 + \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2_0 \theta_i \right) \quad (15d)$$

$$A_{02} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - \sum_{i=1}^N r_i^2 \langle \cos 2\theta_i \rangle \cos 2_0 \theta_i \right) \quad (15e)$$

そうすると、(14)式の確率密度関数 $f(r)$ は、次式で近似できる。

$$f(r) \approx \frac{r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A_{20}\mu^2 - A_{02}\nu^2) J_0\left(r\sqrt{\nu^2 + \mu^2}\right) d\mu d\nu \quad (16)$$

さらに上式を変形してゆくと、結局、次式になる。(式の形を示したいために近似を等号で置き換えている)

$$f(r) = \frac{r}{2\sqrt{A_{02}A_{20}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}} + \frac{1}{A_{02}}\right)\right\} I_0\left\{\frac{r^2}{8}\left(\frac{1}{A_{20}} - \frac{1}{A_{02}}\right)\right\} \quad (17)$$

この式で与えられる確率分布が **q 分布** である。q 分布では A_{02} と A_{20} の比 $\eta (=A_{02}/A_{20})$ が分布の形を決めるパラメータになり、値は 0 から無限大の範囲にある。同式より、 $A_{20}=A_{02}$ 、すなわち $\eta=1$ のとき、確率密度関数はレイリー分布になる。また、 $A_{02} \ll A_{20}$ ($\eta \rightarrow 0$)、あるいは、 $A_{02} \gg A_{20}$ ($\eta \rightarrow \infty$) のとき、半ガウス分布に漸近する。すなわち、

$$f(r) \rightarrow \frac{r}{2A_{20}} \exp\left(-\frac{r^2}{4A_{20}}\right) \quad (A_{02} \approx A_{20}; \eta \rightarrow 1, \eta \equiv A_{02}/A_{20}) \quad (\text{レイリー分布})$$

$$f(r) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi A_{02}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4A_{20}}\right) \quad (A_{02} \ll A_{20}; \eta \rightarrow 0) \quad (\text{半ガウス分布})$$

$$\left(\because I_0(x) \approx \frac{e^{|x|}}{\sqrt{2\pi|x|}} \quad (|x| \gg 1) \right)$$

図3は、全電力を1に正規化した状態 ($A_{02}+A_{20}=1/2$) での $\eta=0\sim 1$ に対する q 分布の確率密度関数を示している。

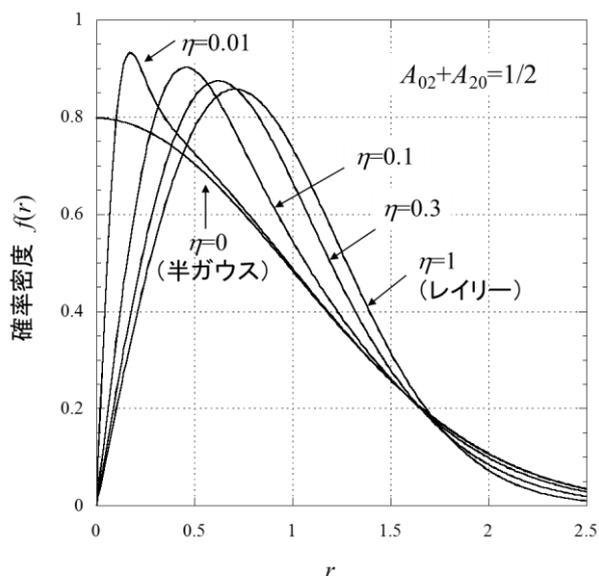


図3 全電力を1に正規化した状態での $\eta=0\sim 1$ に対するq分布の確率密度関数

レイリー分布より変動が大きくなる現象、特に、半ガウス分布に近くなる現象がどういう電波環境で起きるのであろうか。例として、 $\eta \rightarrow 0$ 、すなわち、 $A_{02} \rightarrow 0$ の環境を見てみよう。式(15e)より A_{02} が0に近づくためには、素波の位相 θ_i が0か π 方向に揃っている（その方向に集中している）ときである。この式だけでは、0と π のどちらか一方でもよいのであるが、式(15a,b)中の $\langle \cos \theta \rangle$ をほぼ0として進めてきたのであるから、そうなるためには、位相0と π の素波はほぼ等しい数になること（＝一方に偏らないこと）が要請される。この電波環境のイメージを図4に示す。それぞれの素波は、 $\theta_i=0$ か π 付近を向き、それを中心に、比較的狭い範囲で位相が変化している。そうすると、平均値は打ち消されて0付近になるが、位相の変動分はその直交方向であるので、合成信号は図のy軸に長軸をもつ楕円に近い形になるだろうと理解できる。 $\eta=0$ ではこれが、完全にy軸に揃い、受信信号（複素数信号）で見れば正規分布、その振幅rであれば、値が正方向だけの正規分布、すなわち半ガウス分布になると言うわけである。

近年のGHz帯電波でのマルチパス環境では、短波と違って波長が短く、位相変動は 2π に対して十分大きいので、q分布が現れる図4のような環境を探すのは難しいように思う。n分布（仲上-ライス分布）や次節で述べるm分布が、今の時代においても活躍しているのに比べて、q分布があまり取り上げられないのはこれが理由であろう。ただし、q分布が現れる別の環境もあり、この議論は3.3節へ続く。

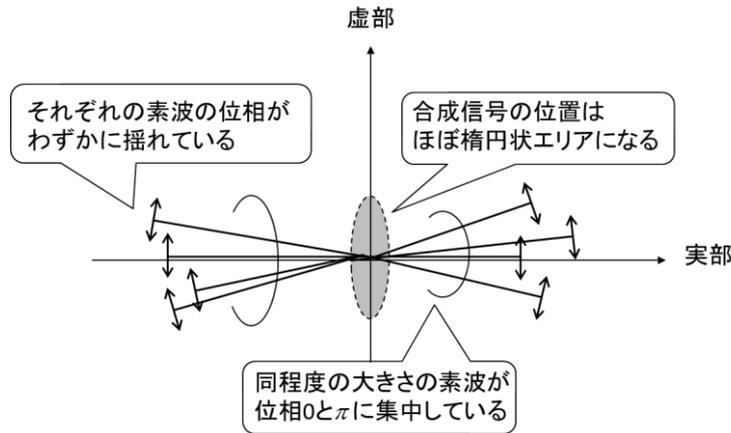


図4 半ガウス分布に近い (=楕円状エリアに分布する) 電波環境の一例

3. 2 ホイトの研究と仲上-ホイト分布

Bell 研の R. S. Hoyt が 1947 年、BSTJ 誌上に(17)式と同形の分布を発表している[12]。n 分布のときと同様、戦時の混乱期において仲上の研究が海外に知られることは無く、洋の東西で独立に研究が行われていたのである。分布の呼び名も、仲上-ライス分布と同様、現在においては、**仲上-ホイト分布**であるが、国際学会等では **Hoyt 分布**でも通用しているようである。このホイトの方法は(17)式の意味を理解するのに好都合である。

ホイトは、通信とか電波とかその応用目的を示さず、分散の異なる 2 次元正規分布の合成振幅 r を求める数学問題として解析を行っている。独立な二つの量 x と y があり、 x を $N(0, \sigma_x^2)$ の、 y を $N(0, \sigma_y^2)$ の正規分布とする。この結合確率密度関数 f_{xy} は次式である。

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \quad (18)$$

このように土俵を設定すれば、 $x=r \cos\theta, y=r \sin\theta$ として、 $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ に変数変換すれば、 r と θ の結合確率密度関数 $f_{r\theta}$ は容易に求まり次式になる。

$$\begin{aligned} f_{r\theta}(r, \theta) &= f_{xy}(x, y) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2\theta}{\sigma_y^2}\right)\right) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{r^2}{4}\left\{\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} + \left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right)\cos 2\theta\right\}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

ゆえに、振幅 r の確率密度関数は

$$\begin{aligned}
 f_q(r) &= \int_0^{2\pi} f_{r\theta}(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{r}{\sigma_x \sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right) \\
 &\quad \left(\because I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos \phi} d\phi\right)
 \end{aligned} \tag{20}$$

となる。これは、 $\sigma_x^2 \rightarrow 2A_{20}$, $\sigma_y^2 \rightarrow 2A_{02}$ とすることで、(17)式と(20)式は同じ確率分布を表している。

ホイットの定式化の出発点からわかるように、振幅 r が二次元平面上の等確率値（等高線）が楕円になる場合の分布を求めたと言う意味では、導出そのものはホイットの方法の方がはるかに容易である。しかし、ホイットの論文ではどのような物理現象が楕円の形を生み出すかには触れておらず、仲上が最も苦労した部分（＝問題設定の原点）が抜けている印象を筆者は受けている。

3. 3 仲上による q 分布の新解釈

仲上は、q 分布発表[2]からおおよそ 20 年後の 1964 年（この時点での所属は神戸大学）、Radio Science Journal へ論文を載せ、q 分布の新たな二つの解釈を示している[13]。

ひとつは、相関をもつ 2 次元正規分布の振幅 r の分布としてである。2 次元正規分布の結合確率密度関数は

$$f_{2G}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

であり、 σ_1, σ_2 は x, y の標準偏差、 ρ は相関係数である。 $x=r \cos\theta, y=r \sin\theta$ として、 $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ に変数変換し、 r の分布を求めれば、(19)、(20)式の手順と同様に以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 f_q(r) &= \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)r^2\right) \\
 \alpha &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} \\
 \beta &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}
 \end{aligned}$$

変数 x と y の相関を考慮しているが、相関行列を直交化して新たな長軸と短軸に変換すれば、3.2 節で述べた Hoyt の方法と同じになる。（仲上が、Hoyt の方法（この時点では公開されていた）を意識していたかどうかは、[13]に Hoyt 論文[12]の引用が無く不明である。）

もう一つのアプローチは、q 分布するフェージング環境を見出すと言う視点である。先に、具体的な環境のメージとして、筆者の理解から図 4 を示しているが、それとは別の見方である。二

つのレイリー波の干渉と言う捉え方である。以下、[13]に従ってその説明を行う。

振幅が r_1, r_2 の二つのレイリー波の合成を考える。その際のレイリー変動の設定に次の2点の仮定を置く。

- ① 振幅 r_1 と r_2 に関して、その二乗値 r_1^2, r_2^2 が相関係数 ρ_p を有する

(仲上論文では相関係数を k^2 としているが、このレポートでは k はハンケル変換形特性関数の変数に用いているので文字を ρ_p に変えている。レイリー変動する信号の複素振幅 a_1, a_2 に対して相関係数 ρ_a が設定されるとき、その電力変動 $|a_1|^2 (=r_1^2)$ と $|a_2|^2 (=r_2^2)$ の相関 ρ_p は $|\rho_a|^2$ になる[14]。)

- ② 2波の位相差は $0 \sim 2\pi$ で一様分布とする (=それぞれの位相は無相関に変動する)

後でも考察するように、この設定は一般的なマルチパスフェージング環境には現れ難い。なぜなら、通常は、振幅変動に相関がある場合は、それに伴って位相変動にも相関があるからである。なお、[13]では、相関を有する2波とは独立に変動するもう1波を加えた環境で定式化を行っているが、三つ目の波の存在は、q分布を説明する際には本質的ではないので、ここでは、これを省いた形で説明する。

振幅に相関を有するレイリー変動の結合確率密度関数は、 $\Omega_1 = \langle r_1^2 \rangle, \Omega_2 = \langle r_2^2 \rangle$ とするとき、次式で表される。

$$f(r_1, r_2) = \frac{4r_1 r_2}{(1 - \rho_p) \Omega_1 \Omega_2} \exp \left\{ -\frac{1}{1 - \rho_p} \left(\frac{r_1^2}{\Omega_1} + \frac{r_2^2}{\Omega_2} \right) \right\} I_0 \left(\frac{2\sqrt{\rho_p} r_1 r_2}{(1 - \rho_p) \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \right) \quad (21)$$

この確率密度関数のハンケル変換形特性関数 $g(k)$ は次式である。

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(kr_1) J_0(kr_2) f(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \\ &= \exp \left(-\frac{(\Omega_1 + \Omega_2) k^2}{4} \right) I_0 \left(\frac{\sqrt{\rho_p \Omega_1 \Omega_2} k^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

式中の2重積分法は、以下の積分公式 ([15] p.46, (62)式) による。

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-px^2 - qy^2) J_0(ax) J_0(by) I_0(2cxy) xy dx dy \\ &= \frac{1}{4(pq - c^2)} I_0(X) e^{-Y} \quad (p > 0, q > 0, pq(a+b)^2) \\ &X = \frac{abc}{2(pq - c^2)}, Y = \frac{pb^2 + qa^2}{4(pq - c^2)} \end{aligned}$$

これより、求めたい r の確率密度関数は

$$f(r) = r \int_0^\infty g(k) k J_0(rk) dk$$

$$= \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)r^2\right) \quad (23)$$

$$\alpha = \Omega_1 + \Omega_2 + 2\sqrt{\rho_p \Omega_1 \Omega_2}, \quad \beta = \Omega_1 + \Omega_2 - 2\sqrt{\rho_p \Omega_1 \Omega_2}$$

式中の積分解法は、以下の積分公式 ([15] p.44,(47)式) による。

$$\int_0^\infty \exp(-px^2) I_0(ax) J_0(2bx) x dx = \frac{I_0(X) e^{-Y}}{2\sqrt{p^2 - a^2}} \quad (p > a > 0)$$

$$X = \frac{ab^2}{p^2 - a^2}, \quad Y = \frac{ab^2}{p^2 - a^2}$$

(23)式において、 $\rho_p=0$ でレイリー分布になり、 $\Omega_1=\Omega_2$ で、かつ、 $\rho_p \rightarrow 1$ で半ガウス分布に漸近する。このようにして、q分布の新たな電波環境が示されたことになる。

なお、q分布は、原著論文[2]での説明が難解であるためか、専門書等で伝搬モデルとしての解説が行われることがほとんどない。筆者が知る限りの唯一なものとして[15] (p. 157) で行われているが、その例は、本節で述べた2波のレイリー変動の干渉問題を用いている。

この環境の前提として二つの条件①と②を課したが、具体的にはどういう電波環境になるのだろうか。通常の意味においてレイリー波が2波合成されたただだと、相関があっても無くても合成波の振幅はレイリー分布を維持し、q分布になることは無い。振幅変動に相関があって、位相変動に相関がないと言う環境はどこにあるだろうか。一つのレイリー波が二つに分かれ、それぞれが独立な位相変動を受けて合成されると言うようなことでないと、レイリー分布より深いフェージングは生まれにくい。例えば、図5に示すように、レイリーフェージングを受けた電波が非再生中継回路によって再放射された後のマルチパス伝搬である。移動体間を幾重にも繋いでゆく通信とか、むしろこれからの無線通信の中に、q分布の有用性が再認識されるかもしれない。

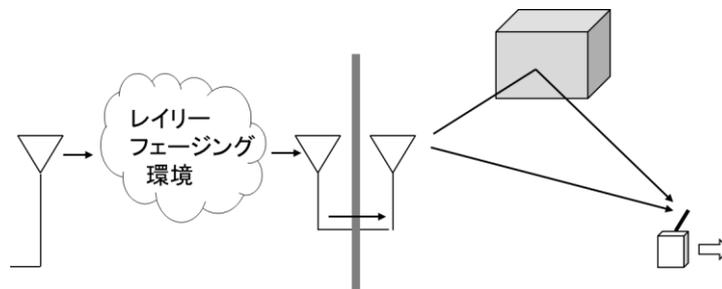


図5 2波のレイリー波の干渉によってq分布が現れる環境の例 (筆者のイメージ)

4. m分布

4. 1 m分布の誕生

m分布は1943年に発表されている[3]。前述のn分布とq分布は純粋な理論的考察に基づいて導かれた分布であるが、m分布は短波のフェージングのデータからその特性を読み取って得た経験則に分類される分布である。しかし、それが、実は、定常不規則確率過程を表す基本的な理論分布の一つであることを最後に示す。

今のように自動記録したデータをパソコンが解析してくれる時代と違って、仲上が活躍した時代（1930～1940年代）には、測定データもブラウン管を見て写真を撮ったり自記記録計の紙データであったりで、解析もすべて手作業である（[6]の1.2節）。短波のフェージングの周期は数秒程度以下であるので、観測単位時間を3～5秒とし、その間における電界強度の変動の範囲（最大値と最小値）をもってその間の電界強度の変動を代表させ、これの数分間の連続記録（図6左）から頻度分布（同図右）を得ていたようである。

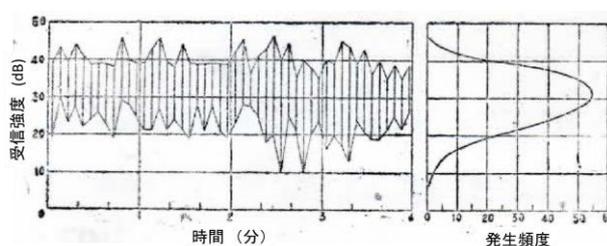


図6 短波フェージングデータと頻度分布特性（[6]の図2.3より）

短波の電離層伝搬におけるフェージングは、遠距離伝搬ではほとんどレイリー分布になるが、中距離以下ではそうはならないことが多かったと書かれている（筆者注：当時の通信事情から、遠距離はサンフランシスコやヨーロッパ各地、中距離は東南アジア諸国や中国と推測）。当時は、フェージング強度の頻度分布（ヒストグラムのことで、累積分布ではない）を見るとき、レイリー分布が直線で表される特殊方眼紙（相対頻度図）を用いていた。以下この相対頻度図の説明を行う。

レイリー分布を次式で表す。

$$f_{Rayleigh}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

ここで、標準偏差で正規化した受信レベルをdBで表し χ と置くと

$$\chi = 20 \log_{10} \left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

であり、この χ の分布は、変数変換により次式なる。

$$f(\chi) = f_{Rayleigh} \left\{ \sqrt{2}\sigma \exp\left(\frac{\chi}{M}\right) \right\} \frac{dr}{dz}$$

$$= \frac{2}{M} \exp\left\{ \frac{2\chi}{M} - \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) \right\} \quad (M \equiv 20 \log_{10} e)$$

この確率密度関数 f は $\chi=0$ [dB] で最大値をもつ。

相対頻度 p' を、 $\chi=0$ のとき 1 となるよう正規化し、かつ、 $\chi>0$ で傾きが継続するよう以下の式のように表す。

$$p'(\chi) = \begin{cases} f(\chi) / f(0) = \exp\left\{ 1 + \frac{2\chi}{M} - \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) \right\} & (\chi < 0) \\ f(0) / f(\chi) = \exp\left\{ -1 - \frac{2\chi}{M} + \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) \right\} & (\chi \geq 0) \end{cases}$$

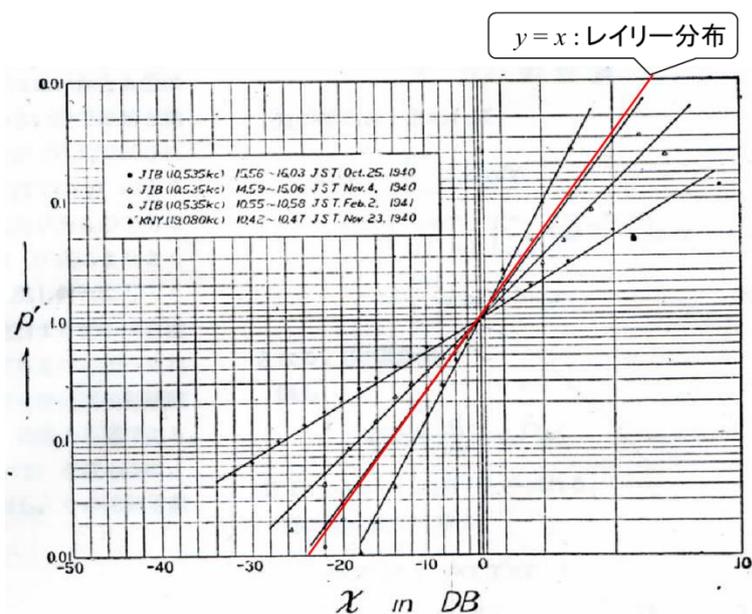
このとき、特殊方眼紙のメモリを

$$x = \begin{cases} 1 + \frac{2\chi}{M} - \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) & (\chi < 0) \\ -1 - \frac{2\chi}{M} + \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) & (\chi \geq 0) \end{cases} \quad (21a)$$

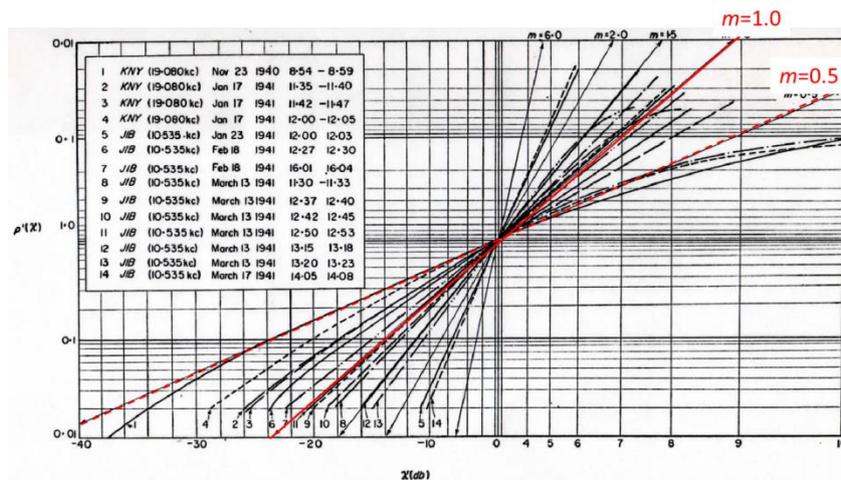
$$y = \ln p' \quad (21b)$$

にとると、レイリー分布はこのグラフ上で $y=x$ の直線になる。ここまでが、データ処理の背景である。

仲上は、この特殊方眼紙上に短波のフェージングをイベント毎にプロットすると図7の特性を示した。同図(a)は文献[3]に示されているもの、同図(b)は文献[5]のものである。同図より、傾きは異なるものの、どのデータもほぼ直線になっていることが読み取れる。そこで、仲上はその傾きを m として、 $y=mx$ を示すものがこの全体の分布ではないかと気が付いた。そして、その m の値は常に 1/2 以上であることが明らかになった。このパラメータ m の導入 (=レイリー分布の拡張) が m 分布の原点 (=歴史の誕生) である。



(a) 文献[3]の図1



(b) 文献[5]の Fig. 2.1

図7 短波通信でのフェージングの相対頻度特性 (図中の赤線は筆者の書き込み)

$y=mx$ として上述の手順を逆にたどってゆくと、この確率分布が得られる。相対頻度 p_m' を改めて次式で置く。

$$p'_m(\chi) = \exp \left[m \left\{ 1 + \frac{2\chi}{M} - \exp \left(\frac{2\chi}{M} \right) \right\} \right] \quad (-\infty < \chi < \infty)$$

確率密度関数 p_m は積分して 1 になるという正規化条件から、次式になる。

$$p_m(\chi) = \frac{2m^m}{M\Gamma(m)} \exp\left[m\left\{\frac{2\chi}{M} - \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right)\right\}\right] \quad (\Gamma: \text{ガンマ関数})$$

さらに、

$$\frac{r}{\langle r^2 \rangle} = 10^{\chi/20}$$

として変数変換すると、求める分布は次式になる。

$$\begin{aligned} f(r) &= p_m(M \ln r) \frac{dz}{dr} \\ &= \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad \left(\Omega \equiv \langle r^2 \rangle, m \geq \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

この式が**m分布**を表す式である。 $m=1$ でレイリー分布、 $m=0.5$ で半ガウス分布であることが分かる。(24)式は、一見、複雑に見えるが、それは見かけのことであって、正規化のための定数係数 (= 積分したら1になるようにするための係数) を A と置けば、分布の形は

$$f(r) = Ar^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad \left(A \equiv \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)}\right)$$

となって、レイリー分布の素直な拡張であること、解析的に扱いやすい形であることが理解できると思う。

4. 2 m分布の位置づけ

4.2.1 近似分布としての性質

m分布は実測データに見られる性質から得た経験則に基づく分布なので、この式が示す理論的な位置づけが知りたいことになる。仲上自身もその意味付けに苦悩している様子とその後の論文から読み取れる。結論として、文献[4] (1953)や文献[5] (1960)において、m分布は位相の狭範囲変動をも含む一般不規則位相問題における高度な近似解であることを示している。本レポートではその詳細説明は省くが、3つの分布のパラメータの関係をまとめておきたい。

m分布のパラメータと変数の関係

$$\begin{aligned} \Omega &= \langle r^2 \rangle \\ m &= \frac{\langle r^2 \rangle^2}{\langle (r^2 - \langle r^2 \rangle)^2 \rangle} = \frac{\langle r^2 \rangle^2}{\langle r^4 - \langle r^2 \rangle^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

m分布とn分布のパラメータの関係 (m>1)

$$2\sigma^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}\right) \Omega$$

$$r_0^2 = \sqrt{1 - \frac{1}{m}} \Omega$$

$$K \left(\equiv \frac{r_0^2}{2\sigma^2} \right) = \sqrt{m^2 - m} + m - 1$$

$$m = \frac{(K+1)^2}{2K+1}$$

図8は、n分布とm分布の近似関係を、代表的なKファクタ（値はdB値）について、比較を行っている。全電力が1になるように正規化しており、(a)は確率密度関数、(b)は累積分布である。同図(a)より、全体で見ればよい近似関係にあることが分かる。一方で、(b)に見られるように、累積確率の小さい部分では、 r の変化に対する累積確率の傾斜が異なって、違いが目立つようになる。このため、n分布をm分布で代用したい場合には、応用目的によって、注意が必要である（例えば、BER特性解析において、BERの小さい部分を調べたいときなどなどは要注意）。

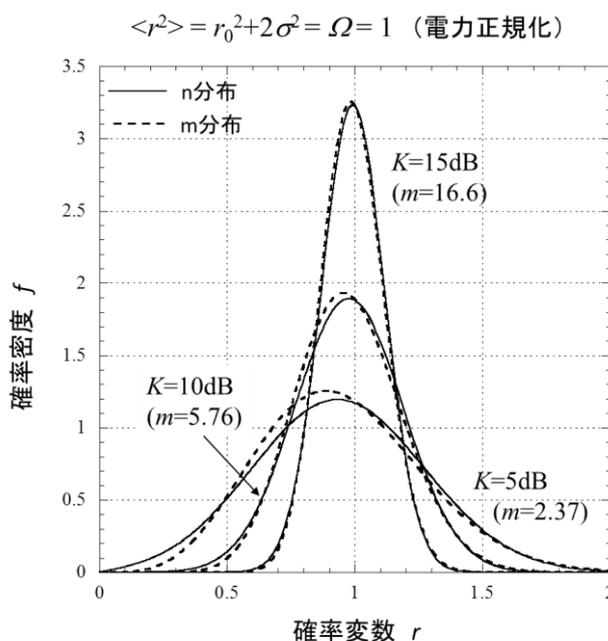
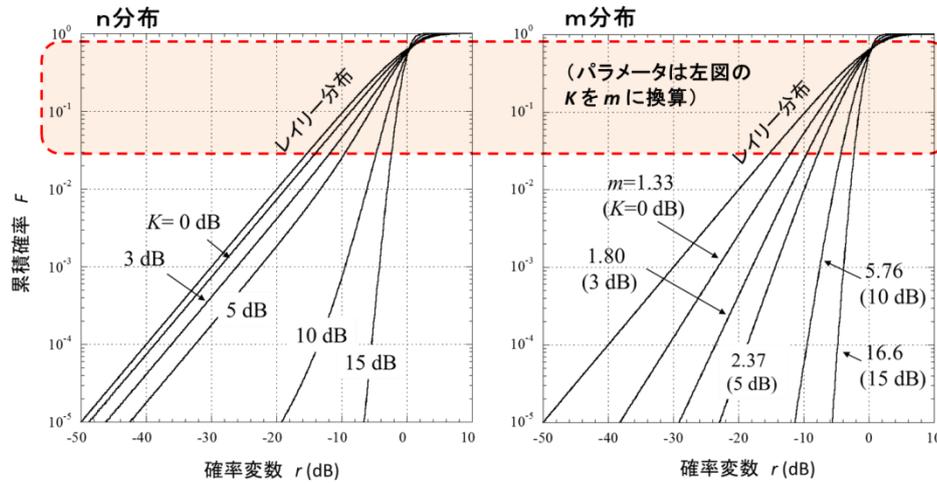


図8 (a) 確率密度関数



(b) 累積分布関数

図8 n分布とm分布の近似関係

m分布とq分布のパラメータの関係 ($0.5 \leq m \leq 1$)

q分布を次式で表すときのパラメータとの関係を示す。

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_x \sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right)r^2\right)$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\eta} \sigma_x^2} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma_x^2}\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{4\sigma_x^2}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)r^2\right) \quad \left(\eta \equiv \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\right)$$

$$\Omega = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = (1 + \eta) \sigma_x^2$$

$$2\sigma_x^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{1}{m} - 1}\right) \Omega$$

$$2\sigma_y^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{m} - 1}\right) \Omega$$

$$\eta = \frac{m - \sqrt{m - m^2}}{m + \sqrt{m - m^2}}$$

すでに述べたように、q分布の両極端には半ガウス分布とレイリー分布があり、この2点でm分布と一致する ($m=0.5$ で半ガウス分布、 $m=1$ でレイリー分布)。しかし、図9に示すように、mの値の中間的な部分では、特に $r < 1$ の領域において違いが目立ち、良い近似関係とは言えない。

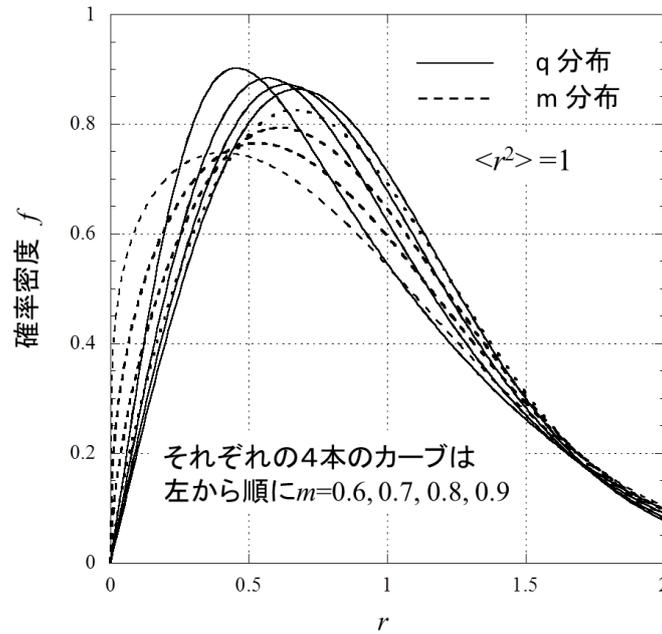


図9 q分布とm分布の近似関係（q分布のパラメータ値は m の値から換算）

三分布の関係

上述の通り、 n 分布は $m > 1$ の範囲で、 q 分布は $0.5 < m < 1$ の範囲で m 分布と近似関係にあることを示した（ただし、前述のとおり、 q 分布と m 分布では良い関係とは言いがたい）。 m 分布は、直接波が支配的な仲上-ライスフェージング（見通し内伝搬環境）、直接波が遮断され散乱波で構成されるレイリーフェージング環境（見通し外伝搬環境）、さらには、レイリーフェージングよりも深い変動をする伝搬環境のモデル化に有用な確率分布で、極めて応用範囲が広いと理解できるであろう。図10は三つの分布の関係を整理してまとめている。

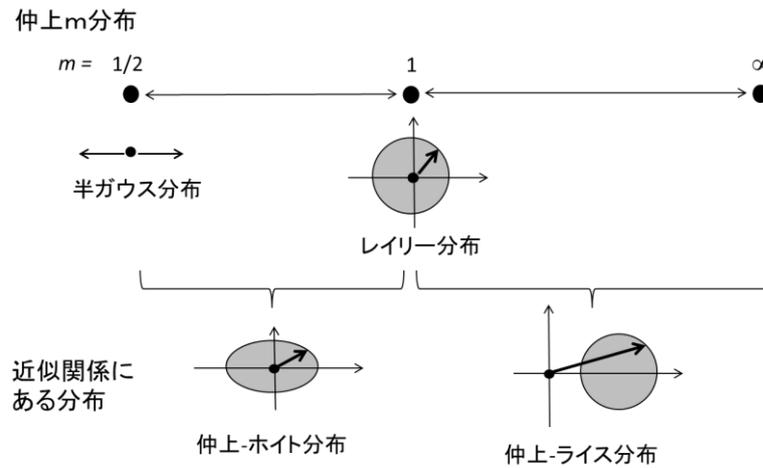


図10 m分布とn分布及びq分布との近似関係

他の分布との関係

理論的には、n分布（仲上-ライス分布）で表される環境の描像は極めてクリアである。しかし、現実の伝搬環境では、直接波が全く影響を受けないことはないであろうし、散乱波が理想的なレイリー分布するとも限らないので、実際のフェージング環境を近似の良いm分布で表されることも多い。応用例はいろいろあるが、筆者自身が調べた一例をここで述べたい。

図11は衛星伝搬のモデルとして代表的なモデルで Loo モデルと呼ばれている[16]。路側帯の樹木に直接波が影響を受けその減衰変動を対数正規分布とするモデルである。それに周囲の散乱波（レイリー分布する）が加わって伝搬経路を成す。直接波への影響はそれほど大きくないので、仲上-ライスフェージング環境に近いのであるが、信号強度の変動はn分布（仲上-ライス分布）そのものではない。Loo 分布には理論式があるが、積分を含む形になっていて、扱いやすいものではない。そう言う場合にm分布を代用すると、良い近似であって解析性に優れているので重宝なのである（詳しくは[17]に）。この例にとどまらずm分布は多くの電波伝搬研究に利用されている。ちなみに、IEEE Xplore でキーワード検索すると、Nakagami distribution で 2129、Nakagami fading で 4322 のヒットがある（2023.02 時点）。

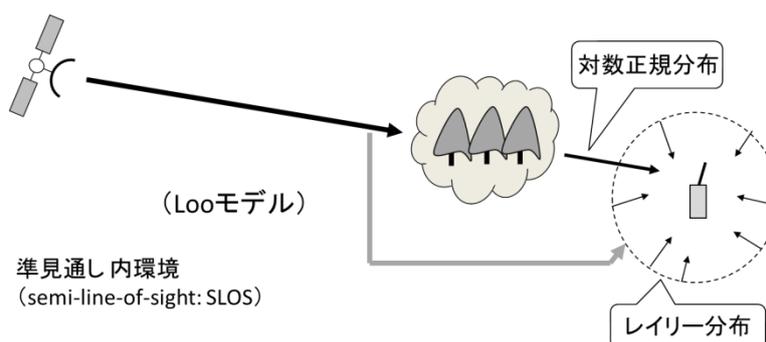


図11 直接波に樹木減衰変動を考慮した Loo モデル

4.2.2 理論分布としての位置づけ

仲上は[5](1960)の§3.4において、以下のことを述べている（1954年に学会の全国大会に発表したと明記されている）。レイリー分布する変数 r_i があり、 N 個の分布が i.i.d（パラメータ σ_i の値が同じで σ ）のとき

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_N^2$$

の r の分布は、 $m=N, \Omega=2N\sigma^2$ の m分布になると。

これは、合成電力の実効値の分布である。上式で $z=r^2$ と置いた z の分布は $\sigma^2=1$ なら自由度 $2N$ のカイ二乗分布、任意の σ に対してはガンマ分布することは 20 世紀の当初には知られていたことである。実際、m分布の変数 r を $z=r^2$ に置き換えて変数変換するとガンマ分布になることは容易に確かめられる。ということは、仲上が探し求めていた m分布の理論的な意味はここにあった

のである。N=1 であれば、変数 r と二乗値 z の関係は、レイリー分布と指数分布の対応である。この対応が、Nが任意の値においては、m分布とガンマ分布の関係にあったのである。伝搬モデルにおいて、ガンマ分布は、電力の合成や、最大比合成ダイバーシチにおける SN 比を求めるところに現れる。ダイバーシチ合成信号の実効値（電圧次元の振幅）がm分布になるのである。

m分布は、多次元空間のランダムウォークにおける出発点からの距離の分布として現れる[18]。(2次元空間のランダムウォーク（の出発点からの距離）はレイリー分布、M次元空間のランダムウォークは $m=M/2$ のm分布)。本質がここにあるとすると、理論的な意味で、m分布が現れる伝搬環境を絵に描こうとすると悩むのである。また、m分布するフェージング環境をパソコンで生成したいと言うとき、その位相をどう与えるかで悩むのである（故に、それに対処するための論文がたくさん出ている）。

図12は正規分布がもとになって生まれた確率分布を、主に振幅を与えるものと電力を与えるものに分けて示している。n分布（仲上-ライス分布）を除けば、図に示す分布は20世紀の初頭には既に知られている分布である。上記の議論より図の？に入る分布がm分布である。この？に入る分布は何かと当時の識者に問えば、ガンマ分布からの変数変換によって、たちどころに、(24)式の分布が示されたであろう。しかし実際はそうではなく、電波技術者である仲上によって、短波のフェージングから発見的に見出されたのである。そのようにして得た実験式が、実は、理論式の一つとして重要な空白を埋めるものであったというところに歴史の面白さがあるのである。なお、仲上は、実測データの事実からパラメータ m の範囲を 0.5 以上としている。ガンマ分布そのものの対応するパラメータ値は 0 以上であるので、伝搬モデルのm分布としては、そこに制約を付けているということになる。

「幸運は待ち受ける心構えのある人のところに訪れる」はセレンディピティの説明によく使われるパスツールの言葉である。仲上が用意していた特殊方眼紙(図7)上に $y=mx$ の直線が現れ、それを本質的な性質と見抜き、後の時代にまで生きる分布を編み出した慧眼こそ、研究におけるセレンディピティと筆者は感じるのである。

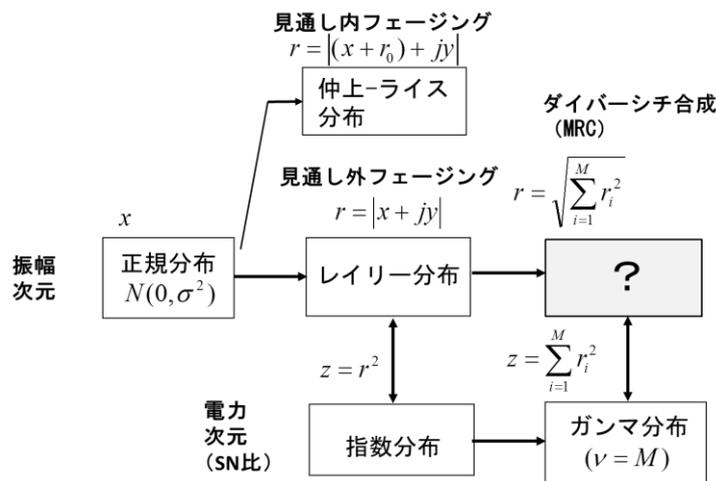


図 1 2 正規分布から派生した各種分布の関係（「？」に入る分布は？）

5. まとめ

仲上が編み出した三つの分布を記して、締めとしたい。

n 分布 (Nakagami-Rice 分布)

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{r_0 r}{\sigma^2}\right)$$

q 分布 (Nakagami-Hoyt 分布)

$$f(r) = \frac{2r}{\sqrt{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)r^2\right) I_0\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)r^2\right) \quad (\alpha, \beta > 0)$$

m 分布 (Nakagami 分布、Nakagami-m 分布)

$$f(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad \left(\Omega \equiv \langle r^2 \rangle, m \geq \frac{1}{2}\right)$$

参考文献

- [1] 仲上稔, “位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究 (その 2),” 電気通信学会雑誌, no. 202, pp. 17-27, 1940.
- [2] 仲上稔、佐々木哲夫, “位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察,” 電気通信学会雑誌, No. 228, pp. 205-213, 1942.
- [3] 仲上稔, “短波によるフェージングの統計的性質,” 電気通信学会雑誌, no. 239, pp. 145-150, 1943.
- [4] 仲上稔、和田俊介、藤村茂幸, “不規則位相問題について,” 電気通信学会雑誌, pp. 1-8, 1953..
- [5] M. Nakagami, “The m-distribution; A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in W. C. Hoffman, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.
- [6] 仲上稔, *短波の特性及び合成受信の研究*, 修教社, 1947.
- [7] 唐沢好男, “伝搬環境のレイトレーシング: その後どうする?,” 技術レポート TR-YK-043:
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_043_Hankel_Transform.pdf
- [8] 森口繁一他, *岩波数学公式 III*, 岩波書店, 1993. (新装版) .
- [9] 仲上稔, 大野政巳, “位相差が不規則な変化をする多数の振動の合成強度について,” 電気通信学会雑誌, no. 196, pp. 337-345, 1939.
- [10] 仲上稔, “位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究 (その 1),” 電気通信学会雑誌, no. 201, pp. 712-722, 1939.
- [11] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Tech. Jour. (BSTJ)*, vol. 23, no. 3, 1944, and vol. 24, no. 1, pp. 46-156, 1945.

- [12] R.S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," Bell Sys. Tech. Jour., vol. 26, 2, pp. 318-359, 1947.
- [13] M. Nakagami, "On the intensity distribution [ここに q 分布の式が入る] and its application to signal statistics," Radio Science Journal of Research NBS/USNC-URSI, vol. 68D, o. 9, pp. 995-1003, 1964.
- [14] 唐沢好男, (改訂) デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, pp. 87-89, 2016.
- [15] 奥井重彦, 電子通信工学のための特殊関数とその応用, 森北出版, pp. 154-160, 1997.
- [16] C. Loo, "A statistical model for a land mobile satellite link," IEEE Trans. Vehicular Tech., vol. VT-34, 3, pp.122-127, 1985.
- [17] Y. Karasawa, "A multi-state channel model composed of line-of-sight and semi-line-of-sight propagation environments for millimeter-wave mobile radio systems," IEEE Trans. AP, vol. 69, no. 12, pp. 8731-8743, 2021.
- [18] 唐沢好男, 無線通信物理層技術へのアプローチ, コロナ社, pp. 67-70, 2021.
- [19] 上福岡市教育委員会, 福岡受信所の歴史: 無線塔がそびえていたまち 上福岡, 市史調査報告書第14集, 1998.

付録1 仲上が研究開発に従事した時代

仲上稔は昭和4年(1929年)に日本無線電信株式会社(注1)に入社し、昭和13年(1938年)に業務継承された国際電気通信株式会社(注2)の福岡受信所(注3)に、技術者として勤務した。仲上が精力的に活動した1930年代後半から1940年代は、まさに昭和の激動期(戦前・戦中・戦後)であり、取り組んだ研究開発にも制約が多く、苦労が多かったと思料される。以下は、文献[19]から、仲上が勤務した部署の記述を抜粋する。

「福岡受信所には、本来の短波受信業務のほかに、当時としては珍しく、電波伝播・アンテナ・受信機などの技術開発を担当する技術者が派遣されていた。それらの技術者を核として、昭和14年に初めて受信所に調査課が置かれた。そのため、受信所構内に研究棟(約60坪)が建てられた。昭和16年に調査課の技術力に着目した海軍技術研究所は、電波技術開発の受託を国際電気通信株式会社に要請してきた。これを受けて調査課は、国際電気通信株式会社技術研究所電波課とし、社員は福岡分室勤務となった。委託業務遂行のために福岡受信所構内に、新たに研究棟3棟、工作室1棟が増加された。そして研究遂行のために、仲上稔課長の下に主任研究者の名前をとって、宮部隊・大島部隊・佐々木部隊などの研究チームが編成された。終戦時には社員のほか、川越高女・松山高女から女子勤労挺身隊員が参加して、研究所活動を支えた。」(当時、上述の「宮部隊」を率いて研究開発を行っていた宮憲一(KDD元副社長)のアンケート記述(p.20より)

注1 日本無線電信株式会社: 1925年に設立された国策会社。外国無線電報用の無線電信設備を維持し、設備を政府に提供することを業務とした。

注2 国際電気通信株式会社: 1938年、日本無線電信株式会社と国際電話株式会社の合併により設立された日本の特殊会社。国際無線電信、国際無線電話、国際海底線電話の設備建設保守を業務とした。

1947年、GHQ指令により解散。施設・業務・職員は通信省に移管。さらに、業務や施設はその後に発足する電電公社、国際電電（KDD）、電気興業、国際電気を引き継がれ今日に至る。

注3 福岡受信所： 埼玉県上福岡の広大なエリア（東武東上線福岡駅からKDDI総合研究所があるエリア一体）に、短波受信用のアンテナが張り巡らされていた。そのアンテナ群は見る者を圧倒したと言われている。国際電気通信株式会社解散後は、組織変遷を経て1953年KDDに引き継がれ、1968年、廃所となった。

付録2 仲上の研究開発に取り組む姿勢

筆者も原著論文を丹念に読み解く過程において感じた仲上の研究者としての執念を本文中にも記しているが、ここでは、技術報告書[6]の「序」より、仲上の研究指導者であった工学博士難波捷吾の推薦文を抜粋して示す。

「この本を読まれた方は直ちに気づくと思うが、仲上君の信条は、物事を徹底的に掘り下げることにある。吾々が日常の通念でとり立てて気にしないような、たとえばフェージングの如き現象に就いても、それをまじめに学問的に研究することになると、極めて広汎な基礎的の学問をしなければならない。大多数の研究者は、こういう場合に直面すると、困難と絶望を感じて他の方面に興味を移してしまうのが常である。然るに仲上君は敢然としてこの困難に立ち向かい、異常な努力をはらって立派な学問的の興えることによく成功せられた。ここに同君の名目躍如たるところがある。特にこの業績は、単に数式を扱っただけのものでなくて、すべて周到な実験データによって裏付けられているところに意義をもつものと信ずるのである。」

読者の皆さんへ

本レポートの内容も大幅に取り入れ、伝搬モデルに使われている確率分布を総ざらいした私製本「電波伝搬モデルの確率分布」を公開しています。併せてご覧ください。

目次のページは[こちら](#)