

モンティ・ホール問題をベイズ推定してみよう

モンティ・ホール問題を題材に、ベイズ推定の考え方をまとめてみたい。名探偵シャーロック・ホームズは、見たこと聞いたことのあらゆる情報を総動員して推理し、難問を解決する。我々も、情報を無駄にしないよう見る目をしっかり持って、チャンスの確率を目いっぱい上げるように努めたい。そのような時、ベイズ推定は、思考回路のエンジンとして我々に力を与えてくれるであろう。

1. モンティ・ホール問題

アメリカのテレビ番組に、モンティ・ホールという人が司会するゲームショーがあったと言う[1]。ルールはこうである。解答者の目の前に三つのドア（ここでは便宜上①、②、③とする）がある（図1）。このドアの部屋のどれか一つに宝物が入っていて、残りは外れ。解答者が当てたらその宝物がもらえる。解答者は、どれか一つの部屋を選ぶように言われる。選んだ後、答えを知っている司会者が「君にチャンスをあげよう」といって、選んでいない二つの部屋のうち外れの部屋のドアを一つ開けてくれる。この状態で、「もう一度よく考えて選んでください」と言う。仮に解答者が最初に①を選んだときは、外れである②か③のどちらかを開けてくれるのである。さあ、どうする。これがゲームの全てである。解答者を悩ますゲームの性格から、モンティ・ホール・ジレンマとも呼ばれている。

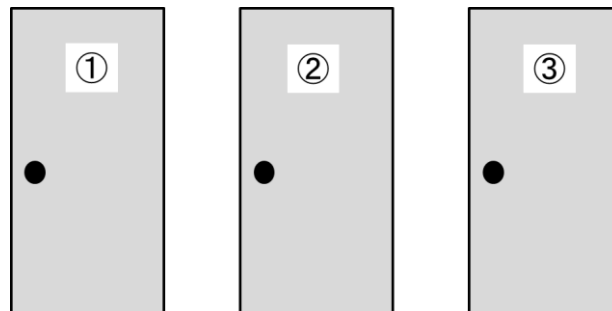


図1 モンティ・ホール問題（三つの部屋の一つに宝物が入っている。開けるチャンスは一回）

何も情報がないときは当たる確率は $1/3$ 。①を選んだとき、②を開けてくれたとしたら、選ぶべきドアは①か③の二つに絞られた。チャンスの確率を司会者が $1/3$ から $1/2$ にしてくれたように感じる。解答者は、頭の中でコイン投げをして、どちらかもう一度決めようと思う。でも、いや待てよ、確率が $1/2$ ならコイン投げしなくても、最初に決めたドアを開ければよいだけではないかと気が付き、そのまま①を開けた。この判断は正しいのだろうか。

この問題は、気軽に楽しめる数学ゲームとして、いろいろなバリエーションがあり（例えば、3囚人問題[2]など）、モンティ・ホール問題もその一つである。正解は、もう一つのドア（②が

開けられれば③に)に持ち替える。それにより、宝物を得る確率が $2/3$ になるのである。組み合わせを総ざらいし、その一つ一つについて当たり・外れを調べれば、そういうことになる(その確認は読者にお任せ)。 $1/2$ ではなかったと言うところに意外性があり、頭の体操として楽しめるのである。

最も直感的な理解には以下の説明がよいであろう。最初に①を選んだとき、その当たり確率は $1/3$ 。残りの②と③あわせて考えれば、そちらで当たる確率は $2/3$ 。②と③のうち、一方にはないよと教えてくれたのであるから、当たり確率 $2/3$ がそのまま残りのドア(②が開けたとしたら③)に移ったと考えれば良い。この問題は、普通の確率計算で解け、これから述べるベイズ推定でなければ解けないと言うわけではない。そのことを知った上で、次節のベイズ推定を見てほしい。解法の特徴がよく見えるのである。

以下、雑談。筆者はモンティ・ホール・ジレンマの話を数学者エルデシュの伝記物語[3]の中で知った。本には次のような話が紹介されている。世界一の IQ (228) とギネスに認められたマリリン・フォス・セイブアントというマダムが週刊誌に人気コラム(マリリンにお任せ)を連載していた。そこに、読者からこのモンティ・ホール問題にどうすれば良いかとの質問が来た。マリリンは、「持ち替えなさい、そうすれば確率は2倍に上がる」と答え、「ドアが百万個あると想像してみなさい。司会者が残り 999,999 個のドアのうち、一つを残してみんな開けてくれたら、あなたは一瞬にして考えを変えるでしょう」。さらに、「司会者がドアを開けてはずれを見せたばかりのところへ UFO に乗った宇宙人が現れ、その何も知らない宇宙人にどちらかを選べと言えば $1/2$ でしょう。あなたはそれ以上のものを見ているのではないですか」と。この記事を見た世の数学者達との論争が面白いのであるが、それは、本でのお楽しみということで。(この話題は[1]にも)。

2. ベイズ推定

2. 1 ベイズ推定とは

ベイズ推定は、数学を趣味とするイギリスの長老派の牧師トーマス・ベイズが 1740 年代に発見した以下の定理に端を発する。二つの事象 A と B があり、図2のような関係であるとする。その共通部分に $A \cap B$ をもつ。

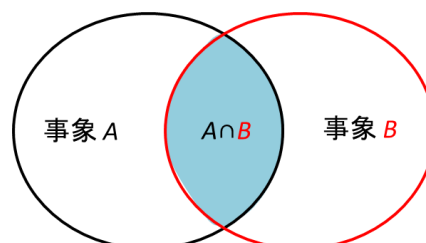


図2 事象 A, B の関係

事象 A, B が起きる確率を $p(A), p(B)$ とし、その両方が同時に起きる確率を $p(A, B)$ とする。さらに、事象 A の中での事象 B の生起確率を $p(B|A)$ 、事象 B の中での事象 A の生起確率を $p(A|B)$ とするとき、これらは、条件付確率と呼ばれる。これらの確率は以下の式で結ばれる。

$$p(A, B) = \begin{cases} p(B|A)p(A) \\ p(A|B)p(B) \end{cases} \quad (1a, b)$$

上式の右辺同士を等号で結んで、以下のように整理できる。

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \quad (2)$$

この式がベイズの公式、あるいはベイズの定理と呼ばれるものである。この式に対して、事象 A に原因を与えるもの、事象 B に結果を与えるものを紐付けることによって、推定式としての効力を発揮するものになる。原因にも結果にも複数の事象があり、 A_i, B_j で表す。結果が B_j であったとき、その原因が A_i である確率 $p(A_i|B_j)$ は、基本式(2)より、次式で表される。

$$\begin{aligned} p(A_i|B_j) &= \frac{p(B_j|A_i)p(A_i)}{p(B_j)} \\ &= \frac{p(B_j|A_i)p(A_i)}{\sum_i p(B_j|A_i)p(A_i)} \end{aligned} \quad (3)$$

この式は、 $p(A_i)$ を事象 A_i の事前確率とみなし、それぞれに対する条件付確率 $p(B_j|A_i)$ がわかれば、 B_j という結果をもたらした後の A_i の確率、すなわち、事後確率が推定できるという式である。この式が、ベイズ推定式である。新しい結果（情報）が入るたびに事後確率が更新され、推定精度が上がってゆくという性質を持つ。式中の条件付確率 $p(B_j|A_i)$ は尤度とも呼ばれる。大事な式なので、その構造を図3にまとめて示す。（左辺を見たら、右辺がすらすら書けるように慣れておくと良い）

$$p(A_i|B_j) = \frac{p(B_j|A_i)p(A_i)}{\sum_i p(B_j|A_i)p(A_i)}$$

図3 ベイズ推定の基本式

大変有用と期待される統計的推定法であるが、正統な統計学者達からは、事前確率の定め方にあいまい性や恣意性が入る余地があるので、それが嫌われて日陰に追いやられてきた長い歴史がある。(このあたりの歴史的事情については[4]に詳しい)。一方で、第2次世界大戦中、英国のアラン・チューリングはベイズ推定によりナチス・ドイツ軍の暗号エニグマを解いたと言われていた。限られた情報からでも不完全な情報からでも(すなわち事前確率があいまいでも)、新たな情報が入るたびに、事後確率の再計算を続けてゆけば、十分満足できる判断(すなわち、最善でなくてもよい)を迅速に導き出せるのがベイズ推定である。カーナビが常に最適な道を教えてくれるとは限らないが、言うことを聞いていれば、ちゃんと目的地にたどり着く。それでよいのである。最善に近い答えを迅速に導き出してくれる推定法は、完璧な答えを時間を掛けて導き出す推定法よりも実用と言う意味で優れていることが多い。ベイズ推定はそのような性格を持つ推定法である。

2. 2 モンティ・ホール問題への応用

原因となる事象 A と事後の結果を定める事象 B の対応付けがうまくでき、かつ原因と結果の条件付確率である尤度が定められれば、求める確率は機械的に求まるのがベイズ推定の特徴である。

解答者が最初にドア①を指定したところからはじめよう。それぞれの事象は以下のように分類できる。

原因となる事象

A_1 : ドア①の部屋に宝物がある

A_2 : ドア②の部屋に宝物がある

A_3 : ドア③の部屋に宝物がある

解答者が①を選んだ後に行われる動作

B_2 : 司会者がドア②を開ける

B_3 : 司会者がドア③を開ける

そうすると、知りたい事後確率は

持ち替えない場合

$p(A_1|B_2)$: 司会者がドア②を開けたときにドア①の部屋に宝物がある確率

$p(A_1|B_3)$: 司会者がドア③を開けたときにドア①の部屋に宝物がある確率

持ち替える場合

$p(A_2|B_3)$: 司会者がドア③を開けたときにドア②の部屋に宝物がある確率

$p(A_3|B_2)$: 司会者がドア②を開けたときにドア③の部屋に宝物がある確率

事前確率は $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=1/3$ である。条件付確率(尤度) $p(B_j|A_i)$ ($i=1,2,3; j=2,3$)は、司会者に特別な意図がない限り表1になろう。(別の可能性もあることを3節で述べる)。これらの条件により、上記4つの事後確率は式(3)により機械的に計算でき、それぞれ次の値になる。

表 1 条件付確率（尤度） $p(B_j|A_i)$ の値

	B_2	B_3
A_1	1/2	1/2
A_2	0	1
A_3	1	0

持ち替えない場合

$$p(A_1|B_2) = \frac{p(B_2|A_1)p(A_1)}{\sum_i p(B_2|A_i)p(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$p(A_1|B_3) = \frac{p(B_3|A_1)p(A_1)}{\sum_i p(B_3|A_i)p(A_i)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

持ち替える場合

$$p(A_2|B_3) = \frac{p(B_3|A_2)p(A_2)}{\sum_i p(B_3|A_i)p(A_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$p(A_3|B_2) = \frac{p(B_2|A_3)p(A_3)}{\sum_i p(B_2|A_i)p(A_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

これより、持ち替えない場合はチャンスの確率 1/3 のままであるが、持ち替えることによって 2/3 に上げることができるのである。複雑な計算をしているように見えるかもしれないが、事後確率の式（上式の左辺）を適切に表すことが出来さえすれば、右辺は形の決まった式を手順通りに計算してゆけばよく、頭を悩ますところがない。アルゴリズムに従った機械的な計算だと思えばよく、それがベイズ推定の特徴である。

3. さらにもう一押し

トムはこのクイズ番組が好きで、毎週欠かさず見ている。そしてあることに気がついた。司会者は、（回答者が①を指定した後）②か③を開けるのに関して、②が外れであればいつも②を、②に宝物がある時だけ③を選ぶようにしているということを。司会者にとっての判断の面倒を

なくす手抜きアルゴリズムである。これによって、何がどう変わるのだろうか。

ルールが変わったわけではないので、基本推定式は(3)式で同じである。違いは、表 1 に示した条件付確率（尤度）が表 2 に変わったことである。

表 2 条件付確率（尤度） $p(B_i|A_i)$ の値（司会者に選択の癖がある場合）

	B_2	B_3
A_1	1	0
A_2	0	1
A_3	1	0

最初に①を指定してから後のことを、表 2 を使って前節と同じ計算をしてみよう。

持ち替えない場合

$$p(A_1|B_2) = \frac{p(B_2|A_1)p(A_1)}{\sum_i p(B_2|A_i)p(A_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$p(A_1|B_3) = \frac{p(B_3|A_1)p(A_1)}{\sum_i p(B_3|A_i)p(A_i)} = \frac{0 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = 0$$

持ち替える場合

$$p(A_2|B_3) = \frac{p(B_3|A_2)p(A_2)}{\sum_i p(B_3|A_i)p(A_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = 1$$

$$p(A_3|B_2) = \frac{p(B_2|A_3)p(A_3)}{\sum_i p(B_2|A_i)p(A_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

ドアを持ち替えた場合、事後確率はドア②が開けられたとき $p(A_3|B_2)=1/2$ 、ドア③だと $p(A_2|B_3)=1$ となった。やった、平均 $3/4$ になったと喜ぶのは早合点。なぜなら、 $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=1/3$ が変わらず、そんなことになるはずはないからである。注意深く見れば、司会者によってドア②が開けられる確率は $2/3$ （表 2 より）、③は $1/3$ であるので、その比率で加重平均すると、

$$\text{当たり確率（ドア替えない）} = p(A_1 | B_2)p(B_2) + p(A_1 | B_3)p(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{当たり確率（ドア替える）} = p(A_2 | B_3)p(B_3) + p(A_3 | B_2)p(B_2) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

となる。結局、トムが手にした新たな情報では当たり確率を変えるとこまでは行かなかった。司会者が③を開けた瞬間に大喜びできる、というのが新たな情報の価値であり、残念ながらトムが気づいたことの恩恵は小さかった（＝結果に影響しない）のである。

司会者はまだ自分の癖が見抜かれていないと気がついていないようである。一方で司会者は、最近の解答者には知恵がつき、持ち替える方ばかりが選ばれ面白くないと感じていた。そこで、「持ち替えないほうを選んで当たったら、おまけをつけよう」と言って来た。さあ、どうする？（ドア②を開けたら①のまま、③を開けたら②に替える、でやる勇気ある？）

4. 補足

ここでは、モンティ・ホール問題をベイズ推定で調べたが、本レポートで言いたかったことは次の2点である。

- 1) 物事の判断において、得られた情報を無駄にしないこと
- 2) ベイズ推定はその判断を得るのに有力な手段であること

前者が重要であることは、劣悪な伝送路に可能な限りの情報を乗せて送りたいと日々奮闘している無線通信技術者には言うに及ばずであろう。一方、後者については、本文でも述べたように、モンティ・ホール問題を解くだけであれば、ベイズの推定法を持ち出さなくても、普通の確率計算で解けてしまい、必ずしもありがたみが見えないかもしれない。場合分けをしっかりと組み合わせの全数を出し、そのそれぞれについて当たり・外れを調べればよいのだから中学生でもできると言われそう。では、本例題におけるベイズ推定のよさはどこにあるのだろうか。i) 新たな情報によって、事前確率が事後確率に変わる統計的推定の環境適応性、ii) 基本式に従って機械的に確率を導き出せるようにアルゴリズム化されている点、について分かってもらえたのではないだろうか。

参考文献

- [1] ウィキペディア, [モンティ・ホール問題](#)
- [2] ウィキペディア, [3囚人問題](#)
- [3] ボール・ホフマン（平石律子訳）、放浪の天才数学者エルデシュ、草思社、2000.
- [4] 豊田秀樹（編著）、基礎からのベイズ統計学、朝倉書店、2015.

読者の皆さんへ

本内容を含めて、確率分布母数推定のためのベイズ推定法をネット公開本「[電波伝搬モデルの基礎](#)」の[第12章](#)にまとめています。