電磁気学の奥深さ(21):微小ダイポールアンテナ動作に見る電磁気学の仕組み

学んだ電磁気学を武器にしてアンテナの動作を解析してみよう。ここでは、最も基本である微小ダイポールアンテナを取り上げ、アンテナが生み出す電磁界とそのときの放射抵抗を求める。アンテナが作る電磁界は、アンテナ導体上に流れる電流分布によって定められるが、電流と磁界の関係を与えるビオ-サバールの法則で求めてもうまくゆかない。何がどううまくゆかないのだろうか。これらを調べることによって、電磁気学(マクスウェルの方程式)が精巧に組み立てられていることを実感してほしい。

1. 微小ダイポールアンテナ

波長に比べて十分短い長さの直線状アンテナは**微小ダイポールアンテナ**と呼ばれる。図 1 (a) に示すように、給電はアンテナの中央部から行う。給電電流 I を

$$I(t) = I_0 e^{j\omega t} \tag{1}$$

球座標の原点に置かれた微小ダイポールアンテナが作る電磁界を距離 r の点において求めることが本レポート前半 (第3章) の目的である。また、その時のアンテナの入力インピーダンスがどのようにして定められるかが、後半 (第4章) の目的である。

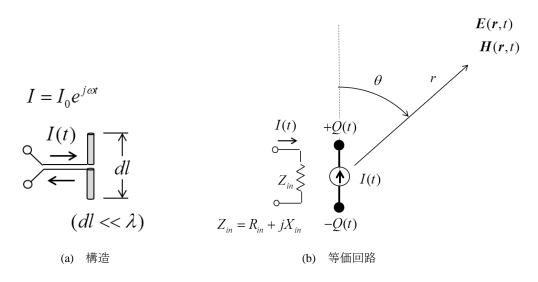


図1 微小ダイポールアンテナの構造とその等価回路

2. 電磁気学の仕組み:そのおさらい

マクスウェルの方程式は、電磁現象の発生源(電荷密度 ρ と電流密度 i)と、それらの存在によって生まれる電磁界(電界 E,電東密度 D、磁界 H、磁東密度 B)の関係を与えるもので、次式である。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
 (2b)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{2c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2d}$$

電流密度と電荷密度の関係は電荷保存則を表す式

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

で結ばれるが、これは、上記(2b),(2c)式に組み込まれている。

マクスウェルの方程式によって、電荷密度・電流密度と電磁界の関係が与えられており、それでもう十分なのであるが、両密度と電磁界を結ぶ中間的な役割を果たす物理場として二つのポテンシャル:スカラーポテンシャルのとベクトルポテンシャルAが導入されている。マクスウェルが電磁気学を構築した際には、式の中にも表れていたのであるが、ヘビサイドが、マクスウェルの方程式を整理して式(2)にまとめ直した時、見えなくなってしまった物理量である。ベクトルポテンシャルは次式で定義される。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{4}$$

(4)式は(2d)式を恒等的に満たしている。(4)式を(2a)式に代入し、電界 E を求め、積分定数を $-\nabla \phi$ として加えると次式になる。

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{\Phi} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{5}$$

二つのポテンシャル ϕ とA はまとめて**電磁ポテンシャル**と呼ばれる。特に、ベクトルポテンシャルA は、電磁気学的観測にかからない(=測定手段がなく検知できない)物理量(場)なので、電磁気学においては、幽霊のような存在(一時はその物理的存在を疑われた)になっているが、量子力学(あるいは量子電磁気学)の世界では、むしろ、電界や磁界よりも本質的な量(ゲージ場)と認識されるに至っている[1]。

この後述べるように、アンテナ解析において、電磁ポテンシャルは、縁の下の力持ち的役割をもち、有効性が高いのであるが、あくまで、最終目的である電界・磁界を求めるための中間的な場と言う位置づけになる。 $E(\phi,A)$ のかたちで表され、 ϕ やAが主役になることは無い。さらに、(4)、(5)式によって、電磁界を求めてみようとすると、微積分に伴う不確定性があって、E、H と

 ϕ , A が一対一対応しない自由度をもつ。このことが、電磁ポテンシャルを定めるに際して、以下のような考え方を生み出している。

目的とする E, H が正しく求められるのであれば、その条件のもとで、 ϕ, A はどのような値であってもよい。許される自由度の中で、E, H を導く過程において、最もその解が求めやすいものを選べばよい、という考え方を採る。ゲージ変換という考え方である。そのようにして定められた条件式がゲージ変換式である。導出の詳細は電磁気学の教科書を見てほしいが(筆者の資料では[2]の第5章に)、以下の条件式(ϕ と A との関係式)を採ると、スカラーポテンシャル ϕ は電荷密度 ρ から、ベクトルポテンシャルA は電流密度i から、それぞれ別々に求めることができる。これで解法が楽になる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} = 0 \qquad (c: \text{ } \pm \text{$$

このゲージ変換式は**ローレンツゲージ**と呼ばれる。一般論として、ゲージ変換式は、解法の 便宜を目的にしているだけのため、ゲージ変換式の物理的な意味を問う必要はない。しかし、(6) 式で与えられるローレンツゲージは、この式を変形してゆくと(3)式の電荷保存式に行き着くこ とが示されている[1]。それなら、なおさら、理に叶った変換であると言える。このローレンツ ゲージを採用することによって、電荷密度とスカラーポテンシャル、電流密度とベクトルポテン シャルの関係が、電荷や電流が存在する領域 V'内の積分により次式のように得られている[3]。

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V} \frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$
(7)

$$A(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V} \frac{i(r',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$
(8)

図2は、上述したアンテナと電磁界を結ぶ電磁気学の仕組みをまとめている。これで、本レポートの目的である微小ダイポールアンテナの放射特性解析の準備が整った。次章の解析を通じて、図2の仕組みを詳しく見てゆきたい。微小ダイポールアンテナの解析は球座標で行われる。その解析の中に現れる勾配・発散・回転の公式を以下にまとめておく。

勾配:任意のスカラー関数 $f(r,\theta,\phi)$ に対して

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$
(9a)

発散:任意のベクトル関数 $X(r,\theta,\phi)$ に対して

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 X_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta X_\theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial X_\phi}{\partial \phi}$$
(9b)

回転:任意のベクトル関数 $X(r,\theta,\phi)$ に対して

$$\nabla \times \boldsymbol{X} = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta X_{\phi} \right) - \frac{\partial X_{\theta}}{\partial \phi} \right\} \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial X_{r}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r X_{\phi} \right) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r X_{\theta} \right) - \frac{\partial X_{r}}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$(9c)$$

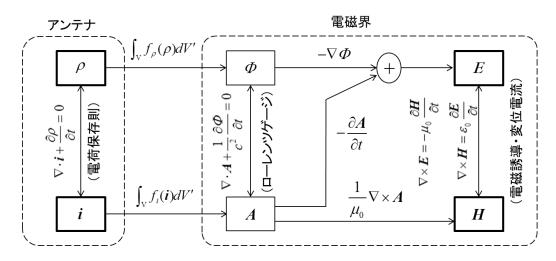


図 2 アンテナと電磁界を結ぶ電磁気学の仕組み(図中の $f_{
ho}$, f_{i} は(7),(8)式の簡略表現)

3. 微小ダイポールアンテナが作る電磁界

微小ダイポールアンテナが生み出す電界 E を求める。図 2 より、以下の二つの手順(方法)があることが分かる。

方法1:電流密度 → ベクトルポテンシャル → 磁界 → 電界

方法2:電荷密度と電流密度 → スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

→ 電界 ((5)式による)

当然同じ解になるはずであるが、その確認の意味で両方法で求めてみよう。

3. 1 方法1

(8)式より、この場合のベクトルポテンシャルは次式となる。式中の k は波数 2πλである。

$$A_z = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r} e^{-jkr} \tag{10a}$$

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi r} e^{-jkr}$$
 (10b)

$$A_{\theta} = -A_{z} \sin \theta = -\frac{\mu_{0} I dl \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr}$$
(10c)

$$A_{\phi} = 0 \tag{10d}$$

磁界は(4)式および(9c)式より

$$H_{\phi} = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) e^{-jkr} , \qquad H_{r} = H_{\theta} = 0$$
 (11)

さらに、電界は、観測点には伝導電流は無いので、(2b)式より

$$m{E} = -j \frac{
abla \times m{H}}{\omega \varepsilon_0} = -j \frac{Z_0
abla \times m{H}}{k} \quad (Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} : 自由空間の固有インピーダンス)$$
 (12)

であり、(11)式と(9c)式より、次式となる。

$$E_{r} = \frac{IdlZ_{0}\cos\theta}{2\pi} \left(\frac{1}{r^{2}} - j\frac{1}{kr^{3}}\right) e^{-jkr} \equiv E_{r1} + E_{r2}$$
 (13a)

$$E_{\theta} = \frac{IdlZ_0 \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} - j\frac{1}{kr^3} \right) e^{-jkr} \equiv E_{\theta 0} + E_{\theta 1} + E_{\theta 2}$$
 (13b)

$$E_{\phi} = 0 \tag{13c}$$

これより、距離に関して 1/r、 $1/r^2$ 、 $1/r^3$ の三つの成分が生まれていることが分かる。電界成分として遠方まで伝搬するのは 1/r の成分(式 13(b)中の E_{00})である。 E_{01} 、 E_{02} 成分は、アンテナの近傍にとどまっていて、遠方に伝搬することができない。距離 r=1/k のとき、3成分の大きさが同じになり、故に、放射界が卓越するのは r>>1/k のときである。三つの成分について、 $1/r(E_{00})$ 、 $1/r^2$ (E_{01} , E_{r1})、 $1/r^3$ (E_{02} , E_{r2}) は、おのおの、**放射電界、誘導電界、準静電界**と呼ばれる。磁界も含めた放射電磁界を整理してまとめると、次式である。

$$E_{\theta} = j \frac{IdlkZ_0 \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j \frac{I_0 \frac{dl}{\lambda} Z_0 \sin \theta}{2r} e^{j(\omega t - kr)}$$
(14a)

$$H_{\phi} = j \frac{Idlk \sin \theta}{4\pi r} e^{-jkr} = j \frac{I_0 \frac{dl}{\lambda} \sin \theta}{2r} e^{j(\omega t - kr)}$$
(14b)

3.2 方法2

(5)式の

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \boldsymbol{\Phi} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \equiv \boldsymbol{E}^{(\Phi)} + \boldsymbol{E}^{(A)}$$

より求める方法である。

まず、右辺第2項 $\mathbf{E}^{(A)}$ から求めてゆく。ベクトルポテンシャルは(10)式で求めているので、これを使うと、

$$E_r^{(A)} = -\frac{j\omega\mu_0 Idl\cos\theta}{4\pi r}e^{-jkr} = -\frac{jkZ_0 Idl\cos\theta}{4\pi r}e^{-jkr} \equiv E_{r0}^{(A)}$$
(15a)

$$E_{\theta}^{(A)} = \frac{j\omega\mu_0 Idl\sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} = \frac{jkZ_0 Idl\sin\theta}{4\pi r} e^{-jkr} = E_{\theta 0}$$
 (15b)

となる。 E_{θ} については(13b)式で得た放射界 E_{θ} が得られている。一方、 E_r についても、放射界 E_{r0} が現れていて、しかもこれは縦波成分なので、最終的には無くなるはずである。 $E_r^{(\Phi)}$ がちゃんとこれを消してくれるかどうか、興味をもって見て行こう。

スカラーポテンシャルによる電界項 $E^{(\Phi)}$ (= $-\nabla \Phi$) については、スカラーポテンシャル Φ の求め方について、二つの方法がある。一つは、アンテナの両端に存在する電荷 ($\pm Q$) による電気双極子から求める方法、もう一つはローレンツゲージの式((6)式)を使って、ベクトルポテンシャルから求める方法である。ここでは後者の方法で求める(前者の方法については、例えば、[4]参照)。

式(6)より、スカラーポテンシャルは次式である。

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{j\nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \quad \left(\because c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \right)$$
 (16)

スカラーポテンシャルによる電界成分 $E^{(\Phi)}$ は

$$\boldsymbol{E}^{(\Phi)} \left(= -\nabla \boldsymbol{\Phi} \right) = -\frac{j \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A}}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} = -j \frac{\omega}{k^2} \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$
(17)

である。後は、上式に(15)式を代入して、式(9a, b)を使って根気よく求めてゆけば、次式となる。

$$E_r^{(\Phi)} = \frac{Z_0 Idl \cos \theta}{2\pi} \left(\frac{jk}{2r} + \frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right) e^{-jkr} = -E_{r0}^{(A)} + E_{r1} + E_{r2}$$
 (18a)

$$E_{\theta}^{(\Phi)} = \frac{Z_0 I dl \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{j}{kr^3} \right) e^{-jkr} = E_{\theta 1} + E_{\theta 2}$$
 (18b)

両項の和 $E_r^{(\Phi)}+E_r^{(A)}$ 、 $E_{\theta}^{(\Phi)}+E_{\theta}^{(A)}$ は、方法1の結果((13)式)と同じになっている。心配した縦波放射電界 $E_{r0}^{(A)}$ も打ち消されてなくなっている。図2は理論的な関係をまとめているのであるから、どのようなコースを辿っても同じ結果に行き着くのは当然と言えば当然なのではあるが、電磁気学、お見事、と言いたいところである。

3.3 ビオ-サバールの法則では?

電磁気学授業の前半、すなわち、静電磁界を扱っているときにおいて、磁界は電流によって生まれると言うことを定式化した**ビオ-サバールの法則**を学ぶ。ビオ-サバールの法則から放射電磁界は生まれるのであろうか?これを調べてみよう。

ビオ-サバールの法則は、電流素辺から観測点までに変化する位相変化を考えない静磁界を扱うものなのであるが、(10a)に習って位相変化を考慮してみよう。ビオ-サバールの法則により得られる磁界は H_a 成分のみで次式である。

$$H_{\phi} = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi r^2} e^{-jkr} \tag{19}$$

(11)式と比べると、1/r の項がないことが分かる。ビオ-サバールの法則からは放射界は出てこないと言うことになる。電界は(12)式より、

$$E_r = -j\frac{Idl\cos\theta}{2\pi\omega\varepsilon_0 r^3}e^{-jkr} = -j\frac{IdlZ_0\cos\theta}{2\pi kr^3}e^{-jkr} = E_{r2}$$
 (20a)

$$E_{\theta} = \frac{Idl \sin \theta}{4\pi \omega \varepsilon_0} \left(\frac{k}{r^2} - j\frac{1}{r^3}\right) e^{-jkr} = \frac{Idl Z_0 \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - j\frac{1}{kr^3}\right) e^{-jkr} = E_{\theta 1} + E_{\theta 2} \quad (20b)$$

となり、 E_{r1} と $E_{\theta 0}$ が現れていない。 $E_{\theta 0}$ がないので、磁界と同様、ビオ-サバールの法則からは、放射電界成分が出てこないと言うことになる。

これはどうしてだろう。それは、変位電流を組み入れて作り上げられた式(2b)を満たしていないことに起因するに違いない。そう言う意味で、さらに深い考察もできそうであるが、それは読者にお任せしたい。いずれにしても、ビオ-サバールの法則は、マクスウェルの方程式を満たしていないため、電磁波解析には使えないということになる。

4. アンテナインピーダンス

アンテナインピーダンスとして、以下の二つのインピーダンスを取り上げる。

- ① 入力インピーダンス Z_{in}
- ② 放射抵抗 R,

入力インピーダンス①は、アンテナを電気回路として見るもので、入力端子に電圧 V をかけ電流 I となるときのインピーダンス $Z_{in}=V/I$ を言う。**放射抵抗**は、アンテナに供給される電力

 P_{in} と空間に放射される電力 P_r が等しいとして定められる入力抵抗で、この場合は実数値が求められる。理論上、 $R_r = \text{Re}\{Z_{in}\}$ となるべきであるが、本当にそうなるかどうかが気になるところである。

最初に、微小ダイポールアンテナの放射抵抗を求める。放射電磁界は(14)式で与えられる。距離 r での電力密度 p_r はポインティング電力で与えられ、次式である。

$$p_{r} = \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^{*} = \frac{I_{0}^{2} \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^{2} Z_{0} \sin^{2} \theta}{8r^{2}}$$
 (21)

これを半径rの球面上で積分すると全放射電力 P_r になり、次式である。

$$P_r = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p_r \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2$$
 (22)

アンテナに給電される電力 P_{in} を

$$P_{in} = \frac{R_{in}I_0^2}{2} \tag{23}$$

として、 $R_{in} = R_r, P_r = P_{in}$ とすると

$$R_r = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \tag{24}$$

となる。

一方、入力インピーダンス Z_{in} (及びその実数分 R_{in})を電磁解析的に求めることは一般的には容易ではなく、微小ダイポールアンテナも例外ではない。そこで、アンテナ電流を正弦分布に仮定できる半波長ダイポールアンテナについて、二つのインピーダンス(①と②)を別々に求めて比べてみよう。

半波長ダイポールアンテナでは、アンテナ上の電流は

$$I(z,t) = I_0 \sin k \left(\frac{\lambda}{4} - |z| \right) e^{j\omega t} \quad \left(-\frac{\lambda}{4} \le z \le \frac{\lambda}{4} \right)$$
 (25)

と仮定することができる。導出の詳細は省くが、起電力法と言う解析手法を用いて、入力インピーダンスが理論的に求められており、以下の値になる[5]。

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = 73.13 + j42.55 \ [\Omega]$$
 (26)

この値の妥当性は、実測によって確認されている。

また、3.1 節で示したと同様の手順を経て、放射界が求められており次式となる[5]。

$$E_{\theta} = j \frac{Z_0 I_0}{2\pi} \frac{\cos\{(\pi/2)\cos\theta\}}{r\sin\theta} e^{j(\omega t - kr)}$$
(27a)

$$H_{\phi} = E_{\theta} / Z_0 \tag{27b}$$

距離 r における放射電力密度は

$$p_{r} = \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^{*} = \frac{Z_{0}}{8\pi^{2}} \left(I_{0} \frac{\cos\{(\pi/2)\cos\theta\}}{r\sin\theta} \right)^{2}$$
 (28)

全空間放射電力 P_r は、(22)式による数値積分により得られ、 P_r =(1/2) R_r I_0 2より、放射抵抗 R_r を求めると、 R_{in} (=73.13)と同じ値が得られる。

これより、

$$R_{in}\left\{=\operatorname{Re}(Z_{in})\right\}=R_{r} \tag{29}$$

が確認できたことになる。理論上 (=物事の辻褄が合うと言う意味において)、全てのアンテナについて、本来一致すべきはずのものであり、微小ダイポールアンテナの入力インピーダンスの 実数分 R_{in} についても、(24)式の放射抵抗 R_{r} を用いて良いと言うことができる。

5. 雑感

微小ダイポールアンテナが生み出す電磁界の仕組みを図2に整理してまとめてみた。これを見ると、マクスウェルの方程式とローレンツゲージで組み立てられた電磁気学は、寄木細工のような精密構造に見えて、実は、どのような風雪にも耐える頑健なものだと知ることができた。以下、いくつかの視点から、原因と結果(因果関係)についての雑感を述べたい。

ものごとには原因と結果がある。図 2 の例では、アンテナ上の電流分布や電荷分布が、電磁界 E, H を生み出している、すなわち、前者が原因、後者が結果と言う位置づけになる。これは良いであろう。一方、電磁誘導を説明するとき、磁界の時間的な変化が空間に起電力を生み出す、と言うように、これも原因と結果で説明づけられることが多い。しかし、電界も磁界も両方とも結果であり、電界と磁界の関係を原因と結果(因果関係)で説明するのはよくないであろう。数式(2a)が示す通り、電磁誘導の法則は、「磁界の電気的な性質($-\partial B/\partial t$)と電界の空間的な構造($\nabla \times E$)が等しいものである」と言うことであって、両者は対等、原因と結果ではない。

3.1 節の方法1で見たように、求めたい電磁界は、アンテナ構造物上の電流分布(伝導電流の分布)のみから得られるので、アンテナ解析はその電流分布を求めるのが本質であると言われる。そしてその放射特性は、電流分布のみの関数で求められるベクトルポテンシャルを知ればよい、と言うことになる。しかし、電流密度と電荷密度は電荷保存則を介して結び付けられており、一つの見方をすればそうであると言うことだけであって、アンテナ解析の本質は電荷分布である、といっても別に良いわけである。さらに、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの関係を与えるローレンツゲージに至っては、電界や磁界を簡易に求めるために取り入れた数学テクニ

Technical Report YK-080 Aug. 21, 2023 Y. Karasawa

ックであって、そのお蔭で、電荷密度とスカラーポテンシャル、電流密度とベクトルポテンシャルがそれぞれ分離して求められているのである。物理的にそういう対応があると言うよりは、そうなるようなベクトルポテンシャルを選んだ(ゲージで縛った)だけである。2章でも述べたように、あくまで、電界と磁界が正しく求められれば良いのであって、中間場である電磁ポテンシャルには、結果に影響しない範囲で細工が施されているのである。

本テーマとは離れるが、「変位電流は磁場をつくらない」と言う主張がある([2]の第8章でそのことを議論している)。図2を見れば、導電電流(電流密度 i)が磁界を生み出しているわけであるから、変位電流は考えなくて良い(=変位電流は磁場をつくらない)、と言うことにもなる。しかし、3.1 節の方法1で示したように、導電電流の 100%の情報を使えばそうなのであるが、その一部の情報(例えばある面を通過する伝導電流)しか使えない場合は、その不足分を変位電流が補ってくれるのである。式(2b)で表されるアンペア-マクスウェルの法則はそのことである。

参考文献

- [1] 村上雅人, なるほどベクトルポテンシャル, 海鳴社, 2020.
- [2] 唐沢好男, *謎解き電磁気学*, 私製本 TR-YK-075, 2023.01. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-075_EM_Wonderland.pdf
- [3] 宇野亨, 白井宏, 電磁気学, コロナ社, 2010.
- [4] 砂川重信, 理論電磁気学(第3版), 紀伊国屋書店, 1999.
- [5] 長谷部 望, 電波工学(改訂版), コロナ社, 2005.