

電磁気学の奥深さ（２３）：原子を構成する電子はなぜ安定に存在できるか

中学校の理科では、原子は陽子や中性子よりなる重たい原子核の周りを軽い電子が回転しているというイメージ（素朴な原子モデル）を習う。その後、大学で量子力学を学ぶと、実はそのイメージは間違いで、電子の実態はもっと漠然としたもの（雲のような波のような）であると知る。この素朴な原子モデルに電磁気学（マクスウェルの方程式）を適用してみると、原子は安定を保てず一瞬のうちに消滅してしまうのである。一方で、その電磁気学は電子に代表される荷電粒子が安定して存在するところを出発点にしている。何か砂上に楼閣を建てているように見えはしないであろうか。本レポートでは、この問題を考えてみたい。

１．素朴な原子モデル

陽子も電子も一つだけの水素原子で考えてみよう。陽子の電気量（電荷）を e 、質量を M 、電子の電気量を $-e$ 、質量を m とし、質量は $M \gg m$ としよう。素朴な原子モデルでは、水素原子の場合、図 1 のように、中心にある陽子の外側を半径 r で電子が周回している（注 1）。これに、電磁気学を適用してその動きを調べる。

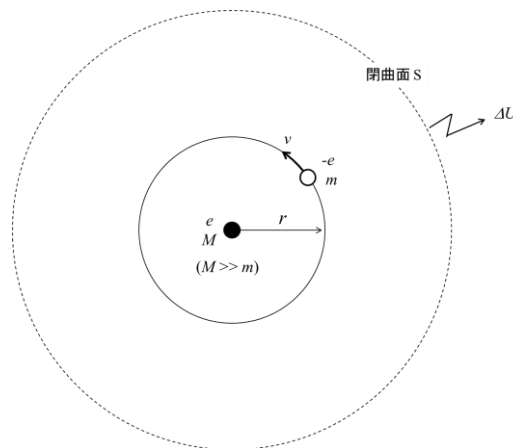


図 1 水素原子をイメージした素朴な原子モデル（閉曲面 S は後の議論で）

注 1：このイメージの電子モデルを最初に提唱したのは長岡半太郎（1903 年、土星型電子モデルと呼んだ）である。その後（1911 年）、イギリスのラザフォードがアルファ線の散乱実験に基づき、より実際に近い原子モデルを発表した。[1] (p. 158) によると、ラザフォードの論文発表の 4 日後、ヘンリー・ブラッグ（X 線による結晶構造解析で有名）からラザフォードのもとに「5, 6 年前、日本の長岡半太郎と言う物理学者が「大きなプラズマ電荷の中心核」をもつ電子モデルを作ったはずだ」と言う手紙が届いたとのこと。実験的裏付けをもって、より実地的なモデルを示した点が評価され、今日では、ラザフォードが惑星型電子構造の提唱者となっている。いずれにしても、2 節で述べるように、このようなモデルでは、構造の安定性が成り立たないと言う致命的欠陥があったため、当時、この模型をまじめに考えてみようと言う物理学者はいなかったと言う（師ラザフォードのモデルを救いたいと奮闘したボーアを除いて）。

陽子と電子の間にはクーロン力が働き、次式で引き合っている（粒子同士の重力による引力はクーロン力に比べて無視できるほど小さい）。

$$F_Q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

電子が静止していればそのまま陽子に引きつけられて衝突してしまうので、原子の定常性を保つためには回転運動して遠心力に助けてもらわなければならない。電子が半径 r の円周上を定速度 v で動くと、その遠心力は

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \quad (2)$$

であり、二つの力が釣り合っていれば良い。この時、軌道半径 r と速度 v の関係は次式のように定まる。

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \quad (3)$$

電子が持つエネルギー U は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギー（電荷×電位）の和であり、次式である。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (4)$$

エネルギーが負になっているが、これは、エネルギーの基準（0 となる値）をどこに置くかという問題であり、ここでは、気にしなくて良い（注2）。エネルギーの大小比較において、電子が核に近づくほど（ r の値が小さくなるほど）エネルギーは低くなる、ということのみを見てほしい。このまま r 一定の状態を維持できれば、原子は安定ということになる。

注2：荷電粒子のポテンシャルエネルギーは「電荷×電位」で与えられる。 $r \rightarrow \infty$ での電位を0とすると、無限遠において、荷電粒子がもつポテンシャルエネルギーは0。負の電荷量をもつ荷電粒子（この場合は電子）を無限遠から距離 r まで運ぶための仕事は、動く方向に力を受けることになり、仕事量（すなわち費やすエネルギー）もマイナスになる。

2. 電磁放射による原子の寿命

マクスウェルの方程式からは、静止又は定速移動している荷電粒子からのエネルギー放射はないが、加速度運動している荷電粒子からはエネルギーが放射されて元のエネルギーが失われてゆく性質が導かれている。図1に示す動作は円運動であり、それは加速度運動なので、電子が持つ

エネルギーは徐々に失われて、軌道半径 r が小さくなり、やがては、陽子に衝突してしまうと言うことになる。素朴な電子モデルには寿命があるのである。ここでは、これを調べてみよう。

動いている電荷は、周囲に電界 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ を生み出している。そうするとポインティングベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ に従ってエネルギー移動が生じる。原子を十分大きく囲むように図 1 に点線で示した閉領域を考え、その閉曲面を S (その単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$) とする。単位時間当たり閉曲面 S から外部に流れ出すエネルギー ΔU は、形式的には次式で表される。

$$\Delta U = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (5)$$

これをきちっと求めるのは大変複雑なので、ここでは、結果式のみを示す (導出の詳細は、例えば、[2] の 9 章 3 節)。電子が陽子から距離 r にあるときの単位時間当たりのエネルギー放射量は、距離の関数として、

$$\Delta U(r) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \right)^2 \quad (6)$$

である。ここで、 c は光の速度である。初めの電子の距離 r を原子の大きさとして知られている長さとして、エネルギーが失われつつ距離が 0 になる時間を寿命としてその値を求めると、 10^{-11} 秒程度になる (この計算も [2] に)。我々の時間感覚で言えば一瞬である。でも、現実の原子は安定していて、そんなことにはなっていない。故に、素朴な電子モデルには致命的な欠陥があると言うことになる。モデルが間違っているのだろうか、電磁気学が間違っているのだろうか。

3. ボーアの仮説

デンマークのニールス・ボーアは、数か月程度ではあったが、マンチェスター大学でラザフォードの研究指導を受け、以来、ラザフォードを研究の師と仰いでいた。そのラザフォードが提唱した電子モデルには、安定して存在できないと言う致命的な欠陥があり、ボーアはその難題を自分の手で救いたいと奮闘していた。ラザフォードの原子モデルには何か安定する仕組みがあるはずと確信していたボーアは、「電子はエネルギーを放出しないような特殊な軌道を占めており、電子がエネルギーを放出しないのは特殊な軌道を占めているからだ」という循環論法を繰り返しているうちに、ついに次の仮説にたどり着いた。1913 年のことである。プランクによって提唱されたエネルギーの量子化 (1900 年) の延長線上にあるとはいえ、いかにもつぎはぎで論理的正当性があるものではなかった。(この発想に至るボーアの思考遍歴は、上述の引用も含めて [1] の第 4 章で詳しく語られている)。

ボーアの仮説： 電子の角運動量 $\mathbf{L}$ の大きさがちょうどディラック定数 $\hbar$ (プランク定数 h を 2π で割ったもの ; エイチバー) の整数倍のときだけ、電子は安定した軌道を保っていられる。

式で書くと次式である。

$$|\mathbf{L}| = mvr = n\hbar \quad (\hbar \equiv h/2\pi; h \approx 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

早速、ボーアが行ったと同じように、2節で展開した推論にこの仮説を適用してみよう。(3)式中の速度 v を(7)式で消して距離を表すと

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2 \quad (8)$$

となって、 $n=1, 2, 3 \dots$ に対応するとびとびの値のみが許される。 $n=1$ のときの半径はボーア半径と呼ばれる。値を代入して計算してみると実際の水素原子の半径に近い。(4)式の半径 r を(8)式で置き換えてエネルギーを求めると

$$U = -\frac{e^4 m}{32\epsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (9)$$

となる。この式は、のちに量子力学の基盤を確たるものにしたシュレーディンガーの波動方程式(1926 年)から求められる結果と一致する。すなわち、ボーアの仮説は、量子力学的に正しかったのである。波動方程式からの解釈では、電子を波動関数と見るとき、周 (ϕ) 方向 1 周分に対して定在波の状態になっているということ、この定在波状態が安定に維持できる波動のみが存在できる、ということである。

このようにして、軌道が(8)式で与えられる電子は、(9)式のエネルギーを保ったまま、安定に存続し続けることができる。めでたし、めでたしである。

4. この結果をどう見るか

電磁気学は、そのテリトリの中心部では、綻びの無い理論(完全無欠な理論)として今もしっかり通用している。しかしそのテリトリの端の方では、すなわち量子力学のテリトリとの境界あたりでは、今回のケースのように電磁気学だけでは説明できない現象が現れてくる。原子の構造が、図1のように素朴な原子モデルが実体であるならば、2節で述べたように振る舞わなければ、電磁気学には綻びがあるということになる。しかし、量子力学が教えてくれる通り、原子の中では、電子の振る舞いは確率的であり、定在波的な波動状態でもあると言う描像からは、図1のモデルは実体を表していない、ということであり、それならば、電磁気学には手が出ない世界、ということになる。そのような実体に対して、つぎはぎ細工のようなボーアの仮説のみを受け入れれば、電磁気学でも大筋の説明がつく、と言うことの方が、むしろ不思議な感を受ける。

電磁気学が全く通用しないと言う意味では、原子核内粒子の力学がある。原子核内にある複数の陽子同士をまとめるには、電磁反発力に打ち勝つ「強い力」が必要であるが、ここまでくると、電磁気学が通用するテリトリからは完全に離れている世界になる。

参考文献

- [1] マンジット・クマール (青木薫訳), 量子革命: アインシュタインとボーア、偉大なる頭脳の衝突, 新潮文庫, 2017.

（文庫本 700 頁の大作であるが、量子力学誕生から完成までの歴史物語で、登場人物を深く掘り下げた記述に感動した。本レポートに関連する原子モデルの話（ボーアの思考軌跡）は第 4 章に）

[2] 砂川重信，理論電磁気学（第 3 版），紀伊國屋書店，1999.（素朴な電子モデルの話は 9 章 3 節）