

伝搬モデルに現れる確率分布 ～レイリーフェージングからマッシュ MIMO まで～

唐沢好男

伝搬モデルに現れる確率分布については、コロナ社の「改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎」[1]の第3章に、かなり丁寧にまとめている。それでも、他章との分量的バランス上、確率分布の基礎の一部は割愛せざるを得なかった。また、MIMO の動作理解に必要なウシャート分布やマッシュ MIMO に適用される漸近固有値分布については、別の章 ([1]の第9章) での説明になっている。本資料は、[1]の割愛部分も含めて、伝搬モデル理解に必要な確率分布の全体を一つにまとめている。これらの確率分布が、具体的に現れる伝搬現象については、文献[1]や無線システムの専門書で学んでほしい。

目次

1. はじめに	2
2. 確率変数と確率分布	2
2. 1 確率と確率密度	
2. 2 積率と相関	
2. 3 確率変数の変換	
3. 正規分布と対数正規分布	9
3. 1 正規分布と中心極限定理	
3. 2 対数正規分布	
4. 正規分布の仲間たち	13
4. 1 レイリー分布	
4. 2 仲上・ライス分布	
4. 3 仲上m分布	
4. 4 指数分布とポアソン分布	
4. 5 χ^2 分布とガンマ分布	
4. 6 ワイブル分布	
4. 7 ラプラス分布	
4. 8 一般化ガンマ分布 (Stacy 分布)	
5. 重畳分布・複合分布	25
5. 1 重畳分布の基本式	
5. 2 レイリー・対数重畳分布 : Suzuki 分布	
5. 3 レイリー・ガンマ重畳分布 : K 分布	
5. 4 その他の重畳分布	
5. 5 複合分布	
6. 多次元正規分布	27
7. ウィンシャート分布	28
7. 1 ウィンシャート行列固有値の確率分布	
7. 2 近似的考え方	
7. 3 漸近固有値分布 : マルチェンコ・パスツール則	

読者の皆さんへ： 本内容を含め、より記述を充実した Open Access Book 「電波伝搬モデルの確率分布」を公開しています。目次のページは[こちら](#)

1. はじめに

無線通信システムの回線設計に際しては、電波伝搬上の様々な不規則要因によって発生する信号劣化が問題となり、これを定量的に評価できる伝搬モデル（伝搬劣化推定法）が重要な役割をもつ。モデルで推定する物理量は、単一アンテナで受信する信号の強度や信号対雑音電力比(SN比)であったり、ダイバーシチ合成後のSN比であったり、さまざまである。システムの稼働率推定などに必要なモデルは、統計量が算出できる確率分布をベースとしたモデルである。実用的なモデルであるためには、高い推定精度と広い適用範囲が重視される。物理現象がもつ性質を正しく反映したモデルが理想であり、そのためには、モデルの中に用いられている確率分布の意味や特徴の理解が不可欠である。

本稿では、移動通信の多重波伝搬モデルの中に現われるさまざまな確率分布を取り上げ、工学的視点に立って、直観的なイメージ把握を試みる。また、そこに現われる大部分の確率分布を包含する一般的な分布形を述べ、これを含めた種々の確率分布の相互の関係を整理して示す。文献[1]では、その第3章において、この内容を取り上げているが、本稿ではこれを含んで、より詳細な記述に踏み込んでいる。また、MIMO（多入力・多出力伝送方式：送受信の双方にアレーアンテナが用いられる高機能伝送方式）の基礎となるウィシャート分布や漸近固有値分布など、同書の他章で取り扱われている確率分布についても、ここで、まとめて述べている。

2. 確率変数と確率分布

2. 1 確率と確率密度

確率 (probability)とは、偶然性を持つ事象について、その事象が起こることが期待される度合い、あるいは現れることが期待される割合のことを言い、0から1までの値をとる。0は絶対起こらない、1は必ず起こるという極限値で、通常は、その中間の値になる。コイン投げでの表が出る確率は1/2、サイコロでは、どの目の確率も1/6と言った値である。このように出現値が離散的なものであれば、上記のように、即座に数値で表すことができるが、連続的に分布する量では、このように簡単なことには行かない。例えば、「人間の身長が160cmである確率は？」と問われても、160.000…とびったりした値は起こりえず、問いに意味がない。強いて言えば「確率0」である。それに対して、「160cmから165cmの間にある確率は？」、あるいは、「170cm以上になる確率は？」と言う問いには、前提が明確であれば、適切に答えることができる。電波伝搬で取り上げられる物理量は、その大部分が、後者の例に属するアナログ量（＝連続分布）になる。

確率的規則に従って連続的に変化する物理量 x は**確率変数(random variable)**と呼ばれる。変数 x がその変化範囲の中の微小範囲 dx (すなわち、 $x-dx/2 \sim x+dx/2$)に存在する確率が、関数 $f(x)$ を用いて $f(x)dx$ と表わされるとき、 $f(x)$ を**確率密度関数 (probability density function: PDF)**という。また、変数 x が x_{min} (x の存在範囲の最小値)と x の範囲にある確率を**累積確率(cumulative probability)**、それを変数 x の関数として表したものを**累積分布関数 (cumulative distribution function: CDF または確率分布関数: probability distribution function)**といい、 $F(x)$ と書く。このように、連続分布の場合は、**確率密度 (probability density)**と言う考え方が大事になる。サイコロのように、出現値が離散的である場合には、例えば、5の目が出る確率密度は $(1/6)\delta(x-5)$ (δ はDiracのデルタ関数)と表される。確率密度の場合は、確率と違って、その値は $0 \sim \infty$ の全範囲の値をとり得る。

変数 x の存在範囲を $x_{min} \sim x_{max}$ とすると、確率密度関数 $f(x)$ には、連続分布・離散分布を問わず、以下の性質がある。関数 $f(x)$ が確率密度関数であるための必要条件とも言える。

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx = 1 \quad (1)$$

累積分布関数 $F(x)$ は次式で表わされる。

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^x f(x) dx \tag{2}$$

上式より、 $F(x_{\min})=0, F(x_{\max})=1$ となる。また、 $F(x)$ は、単調非減少の性質 ($a < b$ ならば、 $F(a) \leq F(b)$) を持つ。

図1は、後述するレイリー分布 (式(47) : $\sigma=1$) を例に、確率密度関数と累積分布関数の関係を示している。累積確率は、時間的に変化する現象に対する確率の場合は**累積時間率** (あるいは単に時間率)、空間の場所的な確率の場合は**累積場所率** (あるいは場所率) と呼ばれている。時間率、場所率は、その確率を100倍して、パーセントで表わされることも多い。

【注：確率の教科書等では、確率変数を X 、その実現値を x のように文字を区別する書き方が多いが、本稿では、確率変数も実現値も同じ文字を用いている。】

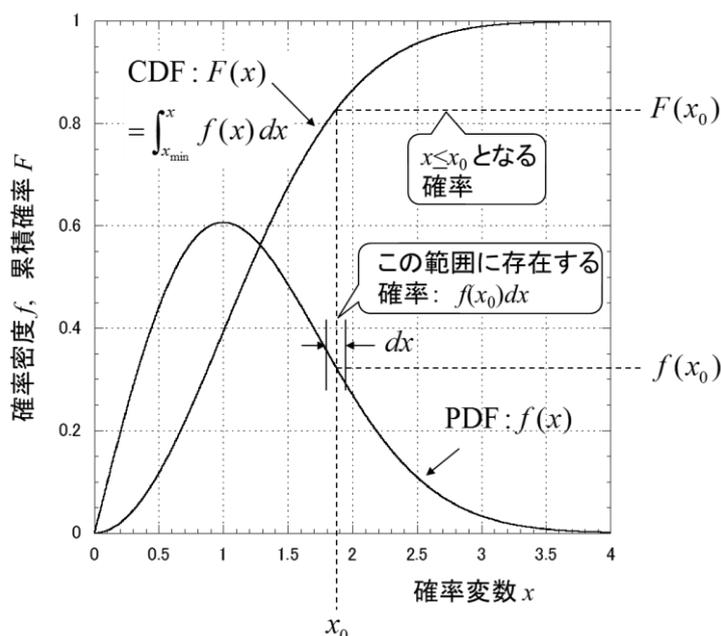


図1 確率密度関数(PDF)と累積分布関数(CDF) (曲線はレイリー分布($\sigma=1$)の例)

2. 2 積率と相関

2. 2. 1 平均・分散・積率 (モーメント)

確率変数 x の関数 $h(x)$ の**平均値** (mean value) $\langle h(x) \rangle$ は次式で与えられる。生じた値 x の平均値をとるといふよりは、もともとの母集団の確率的平均値 (**集合平均** : ensemble average) であり、この意味では**期待値** (expected value) と呼ばれ、 $E(h(x))$ と表される。本資料では、期待値の場合も含めて、平均値 $\langle \cdot \rangle$ で表す。

$$\langle h(x) \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} h(x) f(x) dx \tag{3}$$

上式において、 $h(x)=x$ では、変数 x の平均値を与える。 $h(x)=x^n$ ($n=1,2,\dots$) のとき、すなわち $\langle x^n \rangle$ 値は n 次の**積率** (**モーメント** : moment) と呼ばれる。 $\langle x \rangle = m$ と置くと、積率 $\langle (x-m)^n \rangle$ は、平均値の周りの n 次の積率 (**中心モーメント** : central moment) と呼ばれる (一般的には、「 n 次のモーメント」と言うとき、こちらを指す場合が多い)。これらに関して、以下のような名前が付けられている。

- ① 平均値 (mean value, average) : m ($E(x)$ とも表現される)

$$m \equiv \langle x \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x f(x) dx$$

- ② 分散 (variance) : σ^2 ($V(x)$ とも表現される)

$$\sigma^2 \equiv \langle (x-m)^2 \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x-m)^2 f(x) dx = \langle x^2 \rangle - m^2$$

- ③ 標準偏差 (standard deviation) : 分散の平方根 σ

- ④ 中央値 (median) : $F(x)=0.5$ となる x の値

- ⑤ 最頻値 (mode, most probable value) : $f(x)$ が最大となる x の値

- ⑥ 自乗平均値 (mean square value) : $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f(x) dx = m^2 + \sigma^2$$

- ⑦ rms 値 (root mean square value) : x_{rms}

$$x_{rms} \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{m^2 + \sigma^2}$$

- ⑧ 歪度 (わいど : skewness) : $\langle (x-m)^3 \rangle / \sigma^3$

- ⑨ 尖度 (せんど : kurtosis) : $\langle (x-m)^4 \rangle / \sigma^4$

分布の形状は、①、②、⑧、⑨の4つでほぼ特徴付けられる。

確率変数 x を、平均値 m と標準偏差 σ で規格化して、 $y=(x-m)/\sigma$ と置くと、 $\langle y \rangle=0$ 、 $\langle y^2 \rangle=1$ となる。任意の正の数 λ に対して、 $|y| \geq 1$ となる確率、すなわち、 $|x-m| \geq \lambda\sigma$ となる確率は、 λ が大きいほど小さくなる。このとき、分布が何であってても、以下の式

$$\text{Prob}\{|x-m| \geq \lambda\sigma\} \leq 1/\lambda^2 \quad (4)$$

が成り立つ。これを**チェビシエフの不等式**と言う。[証明は、例えば、文献[4]の p. 63]。式より、平均値から 3σ 以上離れる確率は、どんな確率分布でも $1/9$ 以下であると言うことを示している。具体的な確率分布、例えば、正規分布では、 $\lambda=3$ において 0.2% (両側それぞれ 0.1%) となるように、(4)式よりは、はるかに収束が良いのであるが、全ての分布に対して押さえられるのが興味深い。

2. 2. 2 相関

時間 t に従って変化する現象を $x(t)$ とする。同様に別の現象を $y(t)$ とする。このとき、 $x(t)$ と $y(t)$ の似通い具合 (類似度) を表す指標として**相関 (correlation)** が用いられる。人間の身長と体重のように、身長が増加すれば、体重も増加する傾向が強いようなものに対しては相関が強く、「風が吹くと桶屋が儲かる」的な因果関係の薄いものに対しては、相関が弱い、と言うように用いる。

以下、その定量化である。タイミング (時間である必要はない) を i ($i=1, 2, \dots, n$) として、そのときに生起する量を x_i, y_i 、それぞれの平均値を m_x, m_y とする。このとき、**相関係数 (correlation coefficient)** ρ を次式で定義する。

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - m_y)^2}} \quad (5)$$

相関係数は、変数 x と y が完全相似形するとき 1 (**完全相関**)、正負反転で完全相似形するとき -1 (**負の完全相関**)、独立なとき 0 (**無相関**) となり、この範囲 ($-1 \sim 1$) に値を持つ。 $|\rho|$ が 1 を超えないことは、次式の**シュワルツの不等式**により保証されている (証明 : 略)。

$$\sum_i^n (x_i - m_x)^2 \sum_i^n (y_i - m_y)^2 \geq \left| \sum_i^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) \right|^2 \quad (6)$$

変数 x, y の結合確率密度関数 $f(x, y)$ ($x_{min} \leq x \leq x_{max}, y_{min} \leq y \leq y_{max}$) を用いて、**共分散** (covariance) σ_{xy}^2 を定義すると、次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^2 &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \\ &= \langle (x - m_x)(y - m_y) \rangle = \langle xy \rangle - m_x m_y \end{aligned} \quad (7)$$

相関係数 ρ は、 x, y のそれぞれの標準偏差を σ_x, σ_y とすると、(5)式に対応する形として、次式で表される。

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad (8)$$

図2は、相関係数 $\rho = 0.9, 0.7, -0.5$ に対する x と y の散布図である。同図より相関係数の特徴が良くわかると思う。なお、 $\rho = 0.7$ (正確には $1/\sqrt{2}$) は、 x に対して、 y が x と独立な変動 (例えば、雑音) が同じ平均電力で合成されるとき の状況である。すなわち、 x を所望波信号 (=SN 比無限大) とすると、 y は SN 比が 1 (=0dB) の信号となる。

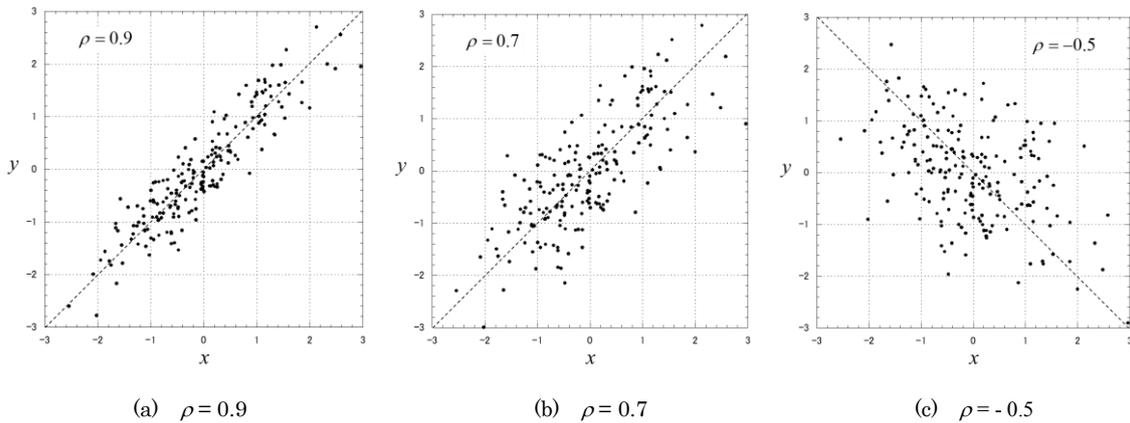


図2 相関係数をパラメータとした散布図 (標準正規分布乱数を使用)

2. 3 確率変数の変換

2. 3. 1 1変数の変換

確率変数 x が確率密度関数 $f(x)$ に従う時、 $u = \phi(x)$ とする新たな確率変数 u の確率密度関数 $g(u)$ を求めてみよう。関数 ϕ は x に対して連続な1次導関数をもつとする。どのような変換によっても、 $x_1 \leq x \leq x_2$, $\phi(x_1) \leq u \leq \phi(x_2)$ の累積分布は同じであり、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{\phi(x_1)}^{\phi(x_2)} g(u) du \quad (9)$$

の関係 [あるいは $f(x)dx = g(u)du$] が満たされるので、

$$g(u) = f\{x(u)\} \left| \frac{dx}{du} \right| \quad (10)$$

となる。電波伝搬のモデルに現れる例では、真数で与えられる確率変数の分布を dB 値の分布に変換する u

$=20 \log_{10} x$ 、振幅の分布が与えられた場合の電力の分布を求める時の $u=x^2$ などがある。前者（真数値→dB値変換）については、 x の増加に対して u も単調に増加し、 u の確率分布は、式(11)のようになる。

$$g(u) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{u}{b}\right) f\left\{\exp\left(\frac{u}{b}\right)\right\} \quad (b \equiv 20 \log_{10} e) \quad (11)$$

後者 ($x \rightarrow x^2$ 変換) の場合には、少し注意が必要になる。確率変数 x が正の領域に存在する場合は、同様の手順で式(12a)となる。一方、 $-\infty < x < \infty$ で存在する場合には、 $\pm x$ が同じ u 値になるので、これを考慮して式(12b)となる。

$$g(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} f(\sqrt{u}) \quad (0 \leq x) \quad (12a)$$

$$g(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \{f(-\sqrt{u}) + f(\sqrt{u})\} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (12b)$$

上記の変換の考え方に基づく、既存の確率分布 f に従う乱数 x から、別の確率分布 g に従う乱数 u を生成する手法を示す。ここでは、 $0 \leq x \leq 1$ の一様分布乱数 $f(x)=1$ から、他の乱数を求める場合を示す。

ステップ1：一様乱数生成手法により乱数値 x を求める。

ステップ2：この累積確率値 $F(x)$ を求める。上記一様乱数では、 $F=x$ である。

ステップ3：作りたい確率分布の累積確率 $G(u)=F(x)=x$ となる u を求める。 G が u の関数で与えられている場合には $u=G^{-1}(x)$ で求める。

ステップ1に戻って、これを繰り返せば、 u は求める確率分布 g に従う乱数列となる。図3はこの手順をまとめている。

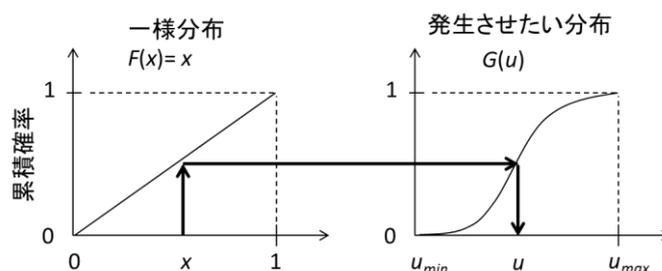


図3 (0~1)の一様分布乱数から任意の確率分布を有する乱数の生成法

2. 3. 2 2変数の変換

確率変数を x, y 、その結合確率密度関数を $f(x,y)$ とする。また、変換後の確率変数を u, v 、その結合確率密度関数を $g(u,v)$ とする。 x, y と u, v の関係を与える

$$u = \phi_1(x, y), \quad v = \phi_2(x, y) \quad (13)$$

における関数 ϕ_1, ϕ_2 は x, y に対して連続な1次偏導関数をもつとする。このとき、変換後の結合確率密度関数 $g(u, v)$ は次式で与えられる。

$$g(u, v) = f\{x(u, v), y(u, v)\} |J| \quad (14)$$

ここで、 J はヤコビアン

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (15)$$

であり、 $|J|$ はヤコビアン J の絶対値である。当然ながら式(14)は1変数の場合の式(10)を含んだ一般化になっている。

2変数の変換では、直交座標 (x,y) のから局座標 (r,ϕ) への確率分布変換 ($f \rightarrow g$) が代表例である。

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (16)$$

とおくと、

$$g(r, \phi) = r f(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (17)$$

となる。

確率変数が3以上でも、式(14), (15)の x, y, u, v を $x, y, z, \dots, u, v, w, \dots$ としてそのまま拡張できる。

2. 3. 3 確率変数の和・差・積・商の分布

複数の確率変数の和や積など四則演算したものを新たな確率変数として分布を求めたい場合がある。ここでは最初に、二つの確率変数 x, y の和・差・積・商を z とし、 z を確率変数とする分布の計算式を与える。次項で特性関数を用いた一般的な和の分布の計算法を示す。

以下に共通する記号の定義を与える。 x, y の結合確率密度関数を $f(x, y)$ 、 z の確率密度関数を $g(z)$ 、 x, y が互いに独立なときの x, y の確率密度関数を $f_1(x), f_2(y)$ とする。

(1) $z = x + y$ の分布

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, z-x) dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(z-y, y) dy \quad (18)$$

x, y が独立のときは、

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_1(x) f_2(z-x) dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_1(z-y) f_2(y) dy \quad (19)$$

となる。これは二つの確率密度関数のたたみ込み積分である。

(2) $z = x - y$ の分布

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, x-z) dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(z+y, y) dy \quad (20)$$

x, y が独立のときは、式(21)になる。

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_1(x) f_2(x-z) dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_1(z+y) f_2(y) dy \quad (21)$$

(3) $z = x \cdot y$ の分布

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{1}{|y|} dy \quad (22)$$

x, y が独立のときは、式(23) になる。

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_1\left(\frac{z}{y}\right) f_2(y) \frac{1}{|y|} dy \quad (23)$$

(4) $z = x/y$ の分布

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{|x|}{z^2} dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(zy, y) |y| dy \quad (24)$$

x, y が独立のときは、式(25) になる。

$$g(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_1(x) f_2\left(\frac{x}{z}\right) \frac{|x|}{z^2} dx = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_1(zy) f_2(y) |y| dy \quad (25)$$

2. 3. 4 積率母関数と特性関数

確率変数 x を以下のように変換して得られる関数は**積率母関数** (moment generating function) と呼ばれる。

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \langle e^{tx} \rangle \quad (26)$$

上式は、指数関数のテーラー展開式を用いれば、以下のように、新しい変数 t のべき級数に展開できる。

$$\hat{f}(t) = 1 + \langle x \rangle t + \frac{1}{2!} \langle x^2 \rangle t^2 + \frac{1}{3!} \langle x^3 \rangle t^3 + \dots \quad (27)$$

式(27)は t に関するべき展開の係数に、高次のモーメントが順次現れていることがわかる。このように、次々と高次のモーメントを生み出しているのが、**母関数** (generating function) と呼ばれる由縁である。

類似の変換として、次式で得られる関数は**特性関数** (characteristic function) と呼ばれる。

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} f(x) dx = \langle e^{jtx} \rangle \quad (28)$$

定義式の形から、積率母関数はラプラス変換に、特性関数はフーリエ変換に対応していることがわかる。このことより、両変換は、本質的には同じことである。

もとに戻す時は、反転公式が用いられる。確率分布関数 $F(x)$ が x_1 と x_2 で連続であるならば、特性関数については、

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jx_1 t} - e^{-jx_2 t}}{jt} \tilde{f}(t) dt \quad (29)$$

で求められる。この式(29)は**レウヴィーの反転公式** (Levy's inversion formula) と呼ばれる。さらに、確率密度関数 $f(x)$ が連続で、かつ、その特性関数が t に関して可積分であれば、式(30)が成り立つ。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-jxt} dt \quad (30)$$

ここで、独立に分布する N 個の確率変数を x_1, x_2, \dots, x_N 、その確率密度関数を $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_N(x_N)$ とすると、 $z = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ の特性関数はおのおのの特性関数 \tilde{f}_n ($n = 1, 2, \dots, N$) の積で表され、

$$\tilde{f}(t) = \prod_{n=1}^N \tilde{f}_n(t) \quad (31)$$

となる。求める確率密度関数は反転公式に従って逆変換すればよい。ちょうど時間領域の変動の畳み込み積分が周波数領域ではスペクトルの積で表されるのと同じ仕組みと思ってよい。電波伝搬の確率分布に表れる例では、ダイバーシチの最大比合成後の分布を求める時にこの公式が利用されている。

なお、ここでは、フーリエ変換対に相当する確率密度関数と特性関数の変換・逆変換の関係を述べたが、ラプラス変換対に相当する積率母関数への変換・逆変換の仕方も、和の分布を積の分布に土俵を変えて求めることにおいても、基本的には特性関数と同じである。

積率母関数や特性関数に見られるように、変換・逆変換が線形対応にできればよいわけで、他にも変換の方法はいろいろ考えられる。信号の包絡線など、正の値をとる確率変数に対しては、以下の式で与えられるハンケル (Hankel) 変換形の特性関数も便利である。

$$\bar{f}(t) = \int_0^{\infty} J_0(rt) f(r) dr = \langle J_0(rt) \rangle \quad (32a)$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} t J_0(rt) \bar{f}(t) dt \quad (32b)$$

ハンケル変換型特性関数での解析例は、文献[5]に取り上げられているので、詳細はそこを見てほしい。フェージングに現れる仲上・ライス分布を仲上が導出した際には、この特性関数が用いられている (4.2 節の仲上・ライス分布の項参照)

2. 3. 5 異なる分布の近似度評価指標

確率密度関数 $p(x)$ を別の確率密度関数 $q(x)$ で代用したいという場合がある。たとえば、ある確率分布が、他の関数と組み合わせて使う場合には、積分が残って扱いにくいために、解析性に優れた別の分布で近似したいというような場合である。あるいは、実測値の分布を得た場合に、それを特定の分布で近似したいというような場合である。そのときの2つの分布の差異を表す尺度として、式(33)で定義されるカルバック・ライブラ指標 (Kullback-Leibler (KL) measure) がある。

$$D(p:q) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) \ln \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \right\} dx \quad (33)$$

2つの分布 p と q が同じ場合に、 $D=0$ となり、ずれの程度に応じて値も大きくなる。置換目的であれば、置き換えたい分布 q のパラメータ値を調整して、 D が最も小さくなるように最適化すればよい。

なお、このカルバック・ライブラ指標は、情報理論におけるカルバック・ライブラ情報量に対応する。直感的には二つの分布の距離のイメージであるが、上式で p と q を入れ替えたときの対称性が崩れているので、距離と呼びにくい事情がある。

3. 正規分布と対数正規分布

3. 1 正規分布と中心極限定理

3. 1. 1 正規分布とは

以下の式で与えられる確率分布が**正規分布** (normal distribution) である。**ガウス分布** (Gaussian distribution) とも呼ばれる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \equiv N(m, \sigma^2) \quad (34)$$

パラメータ m は平均値、 σ は標準偏差である。正規分布は $N(m, \sigma^2)$ の形で簡易に表すことも多い。平均値 0、標準偏差 1 の正規分布 $N(0,1)$ は標準形、あるいは、**標準正規分布** と言い、特に重要である。任意の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ は、確率変数 x を変数変換

$$y = \frac{x-m}{\sigma} \quad (35)$$

することで、確率変数 y に対しては $N(0, 1)$ の標準正規分布になる。正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に対する n 次モーメント (あるいは、 $N(m, \sigma^2)$ に対する中心モーメント) は、 $n=1, 2, 3, 4$ に対して、それぞれ、0, σ^2 , 0, $3\sigma^4$ となる。

累積分布関数 F は次式である。

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \quad (36)$$

ここで、 $\operatorname{erf}(\cdot)$ は誤差関数で、次式で定義される。

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (37)$$

図4は標準型正規分布 $N(0, 1)$ の確率密度関数と累積分布関数の計算例である（同図には後述する対数正規分布の結果も）。

正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の特性関数は次式で与えられる。

$$\tilde{f}(t) = \exp\left(jmt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad (38)$$

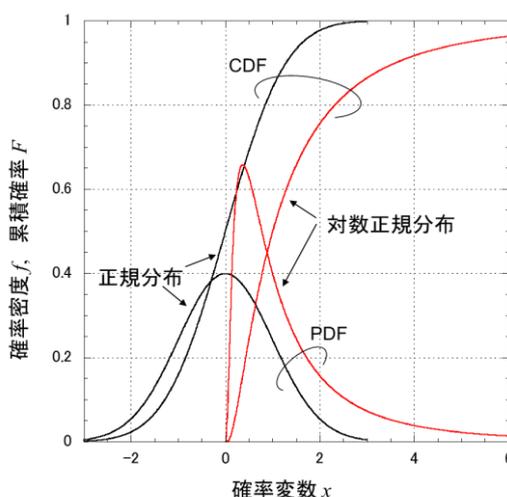


図4 正規分布と対数正規分布（分布のパラメータは、共に、 $m=0, \sigma=1$ ）

3. 1. 2 中心極限定理と正規分布の物理イメージ

ランダムに生起する現象では正規分布が全ての基礎であり、他の分布の出発点となる。その理由は以下に述べる中心極限定理（central limit theorem）による。

【中心極限定理】 確率変数 x_1, x_2, \dots, x_n が互いに独立に同一の確率分布に従うとき、その平均と分散を m, σ^2 とする。このとき、 x_1, x_2, \dots, x_n の平均 $x = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ の確率分布は、 n が十分大きければ、正規分布 $N(m, \sigma^2/n)$ となる。

分布の形を問わないことが味噌で、意味するところが深い。例外はあって、コーシー分布 ($f(x) = 1/\{\pi(1+x^2)\}$; $-\infty < x < \infty$) のように平均や分散が定まらない分布（いわゆる、裾の広がり大きい分布）では成立しないが、それは特殊なものであって、自然界で普通に現れる分布についてはこの定理が成立する。その証明は以下による。

正規化して合成された信号 $x = \sum_{i=1}^n (x_i - m)/(\sqrt{n}\sigma)$ の特性関数を $\tilde{f}_n(t)$ 、 $(x_i - m)/(\sqrt{n}\sigma)$ の特性関数を $\tilde{f}(t)$ とすると、確率分布の和の分布の特性関数は、個々の分布の特性関数の積となる性質から $\tilde{f}_n(t) = \{\tilde{f}(t)\}^n$ が成

り立つ。一方、 $\tilde{f}_n(t)$ はテーラー展開を用いて $\tilde{f}_n(t) = 1 - t^2/(2n) + o(t^2/n)$ (o は n の増加と共に前項に比べて微小になる項) と展開される。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right\}^n = e^{-t^2/2} \tag{39}$$

が得られる。式(38)より、 $\exp(-t^2/2)$ は標準正規分布の特性関数であるから、合成信号 x の分布は標準正規分布に収束することが示された。正規化した変数を一般形に戻せば、中心極限定理の形になる。

正規分布の和の分布は正規分布になると言う再生性がある (すなわち、 $N(m_1, \sigma_1^2)$ と $N(m_2, \sigma_2^2)$ の和の分布は $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ なので、中心極限定理を拡大解釈すると、同一分布の条件をはずしても、それぞれの和の数が十分大きければ、平均値は正規分布になると言うことができる。

この中心極限定理によって、正規分布は同じようなものがたくさんランダムに集まったときの和の分布であると理解でき、確率分布の基本中の基本と位置づけられる。このような確率過程は**加法確率過程** (あるいは**加算的確率過程**: additive stochastic process) に分類される。図5はこのイメージを示している。それぞれの人のバケツに入った水を 0~1 の一様乱数によって、水量を調整し、これを大きな水槽に集めることを繰り返す。毎回異なる水の量 (あるいは重さ) が、人数が多くなるほど正規分布に近づいてくるわけである。

通信においては、無数の分子の熱振動の合成による熱雑音の分布や、建物等に反射された多数の電波 (マルチパス波) が合成された受信信号の基準位相成分 (I 成分) あるいはその直交成分 (Q 成分) の分布に、正規分布が現れる。さらに、正規分布から派生した確率分布、すなわち、加算的確率過程に分類される分布が多く現れてくる。

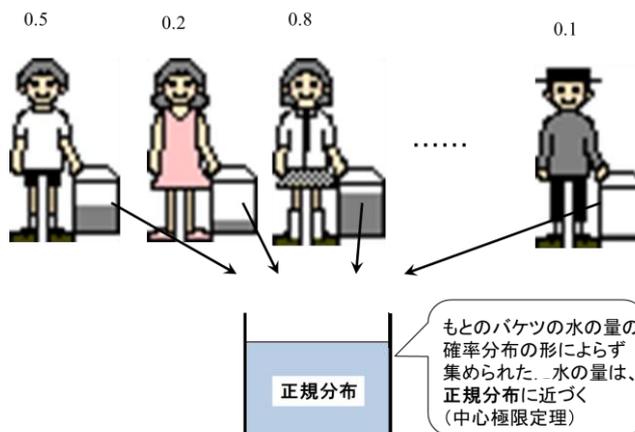


図5 加算的確率過程のイメージ

3. 2 対数正規分布

確率現象において、期待値からのずれを \pm で表すことが多い。この考え方は、前述の加算的確率過程がベースにある。一方、誤差の推定に倍半分という捉え方がある。この捕らえ方は、これから学ぶ**乗算的確率過程** (multiplicative stochastic process) がベースになる。

ある量 x_i の対数値 $\ln x_i$ が多数存在し、これが合成される現象を考える。その現象は、以下の式で表される。

$$\ln x = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n \quad (\ln x \equiv \log_e x) \tag{40}$$

n が十分大きくなると、中心極限定理により、 $\ln x$ の分布は、正規分布に近づく。式(40)は式(41)のようにも書ける。

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \tag{41}$$

この式から、この現象は、多数の確率的要因が積の形で現れたものと理解できる。対数値が正規分布するので、元の量 x は**対数正規分布** (log-normal distribution) と呼ばれる。確率密度関数と累積分布関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \equiv \Lambda(m, \sigma^2) \tag{42a}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{\ln x - m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \tag{42b}$$

ここで、 m, σ は分布のパラメータで、 $\ln x$ の平均値および標準偏差である (x そのものの平均値や標準偏差ではないことに注意を)。 x の分布の特性を示す値は以下のとおりである。

- ・最頻値： $\exp(m - \sigma^2)$
- ・中央値： $\exp(m)$
- ・平均値： $\exp(m + \sigma^2 / 2)$
- ・rms 値： $\exp(m + \sigma^2)$
- ・標準偏差： $\exp(m + \sigma^2 / 2) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$

図 4 に、 $m=0, \sigma=1$ の対数正規分布の計算例を示している。

正規分布の和の分布の正規分布への再生性と同じ意味で、対数正規分布 $\Lambda(m_1, \sigma_1^2)$ に従う確率変数 x と対数正規分布 $\Lambda(m_2, \sigma_2^2)$ に従う確率変数 y の積 xy の分布は対数正規分布 $\Lambda(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ となる再生性を有する。正規分布は、多数のランダムなものの和の分布に対して現れる加算的確率過程の現象を表すが、対数正規分布は、多数のランダムなものの積の分布として現れるため、**乗算的確率過程**の現象を表す。図 6 はこのイメージを表している。加算的確率過程を、バケツでプールに水を貯めるイメージで捉えたが、乗算的確率過程はバケツリレーのイメージである。それぞれのの人に $0 \sim 1$ の一様乱数が与えられ、その乱数に従った割合で受け取った水の量を減らして次の人にリレーしてゆく。この人数が十分大きければ、乱数の性質によらず、最後に残った水の量の分布は対数正規分布に収束するということである。

信号強度の変動が対数正規分布する例を伝搬現象の中で探してみよう。伝搬路の途中で何回も伝搬障害に会って、その都度ランダムに強度を弱めながら、受信点にたどり着いたときの電波の強度を近似する分布がそうである。この例として、層の厚い樹木中を伝搬する例や、市街地で見通し外の電波が伝搬する場合に、多数の建物によって次々散乱されながら伝搬してくる現象がそうであり、前者の例は陸上移動体衛星通信伝搬を対象とした Loo モデル[8]の中に、後者の例は、市街地における短区間中央値変動として、移動伝搬モデル[9]の中に取り入れられている。実際に、この様な例が対数正規分布するかどうかの定量的な評価はまだ十分ではない。しかしながら、分布のもつ物理的な性質を反映しているという点で筋の良いモデルである。

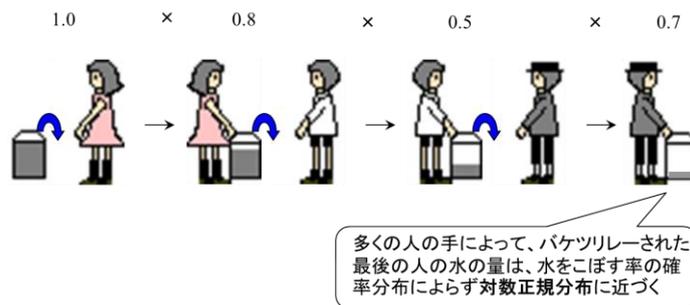


図6 乗算的確率過程のイメージ

4. 正規分布の仲間たち

移動伝搬モデルに現われる確率分布を取り上げ、その特徴と物理的意味を述べる。確率分布の基本である正規分布と対数正規分布については、前節で述べているので、ここでは、主に、正規分布から派生する分布を取り上げる。電波伝搬上の物理量（信号強度、電力、信号対雑音電力比（SN比）等）との関係に絞り、確率分布の理解に役立つ直観的なイメージを与えることに力点を置く。

4. 1 レイリー分布

レイリー分布 (Rayleigh distribution) と次節の仲上・ライス分布 (Nakagami-Rice distribution) は、多重波伝搬の基本分布である。

いまここに、独立な確率変数 x と y があり、その確率密度関数 f_x, f_y が共に $N(0, \sigma^2)$ に従うとき、その振幅 r の分布がレイリー分布になる。振幅 r は次式で表される。

$$r = |x + jy| \left(= \sqrt{x^2 + y^2} \right) \tag{43}$$

x と y の分布は独立であるので、結合確率密度関数 f_{xy} は f_x と f_y の積になり、次式で表される。

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) f_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \tag{44}$$

ここで求めたいのは振幅 r の分布であるので、確率変数 x, y を振幅 r と位相 ϕ を用いて次式で置き換える。

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \tag{45}$$

確率変数 r と ϕ の結合確率密度関数 $f_{r\phi}$ は次式となる。

$$\begin{aligned} f_{r\phi}(r, \phi) &= f_{xy}(x, y) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{46}$$

これより、振幅 r 、位相 ϕ の確率密度関数 f_r, f_ϕ は、おのおの

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{47}$$

$$f_{\phi}(\phi) = \int_0^{\infty} f_{r\phi}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi} \quad (48)$$

となる。(47)式で表される確率分布が**レイリー分布** (Rayleigh distribution)、(48)式の分布が**一様分布** (uniform distribution) である。

レイリー分布の累積分布関数 F は、(47)式の積分によって得られ、

$$F(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (49a)$$

$$\approx \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad (r \ll \sqrt{2}\sigma) \quad (49b)$$

となる。(49b)式より、累積確率値が 0.1 以下の部分では、振幅 r (あるいは電力 r^2) が 10dB 低下すると、累積確率は 1/10 になる。

レイリー分布の最頻値は σ 、中央値は $\sqrt{\ln 4}\sigma \approx 1.18\sigma$ 、平均値は $\sqrt{\pi/2}\sigma \approx 1.25\sigma$ 、rms 値は $\sqrt{2}\sigma \approx 1.41\sigma$ 、標準偏差は $\sqrt{2-\pi/2}\sigma \approx 0.665\sigma$ である。レイリー分布の例 ($\sigma=1$) は図 1 に示している。

レイリー分布は、位相のランダムな波が多数集まった時の信号の強度 (包絡線) の分布に現われる。直接波が遮へいされて、たくさんの散乱波だけが受信される地上系移動通信のマルチパスフェージング環境が代表的な例である (同程度の振幅の波であれば、5 波集まればかなり良いレイリー分布となることが確かめられている [10])。このように、振幅の変動がレイリー分布する伝搬環境は**レイリーフェージング** (Rayleigh fading) 環境と呼ばれている。

なお、 $z=r^2$ としたときの z の分布は 4.4 節で述べる指数分布になる。

4. 2 仲上・ライス分布

レイリー分布に定常成分が 1 つ加わったときの振幅の確率分布が**仲上・ライス分布** (Nakagami-Rice distribution) となる。この仲上・ライス分布は、**ライス分布** (Rician) とも呼ばれている (囲み記事参照)。式 (43) の x の分布を $N(a, \sigma^2)$ 、 y の分布を $N(0, \sigma^2)$ 、とするときの r の分布 である。図 7 はこの説明図である。

この場合の、 r と ϕ の結合確率密度関数 $f_{r\phi}(r, \phi)$ は、(46)式と同様な形で

$$\begin{aligned} f_{r\phi}(r, \phi) &= f_{xy}(x, y) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 - 2ar \cos \phi + r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

となる。これより、振幅 r 、位相 ϕ の確率密度関数 f_r 、 f_{ϕ} は、おのこの

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f_{\phi}(\phi) &= \int_0^{\infty} f_{r\phi}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad \times \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos \phi}{\sigma} \exp\left(\frac{a^2 \cos^2 \phi}{2\sigma^2}\right) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{a \cos \phi}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

となる。ここで I_0 は第 1 種の 0 次変形ベッセル関数である。

式(51)で表される確率分布が**仲上・ライス分布**である。式の形からわかるように、定常波成分の強度 a を 0 とすれば、レイリー分布になる。ゆえに、仲上・ライス分布はレイリー分布をその極限に含んで、より一般的な分布である。

伝送特性の評価に用いられる $z=r^2$ と変換した電力次元での確率分布 $f_z(z)$ は、

$$f_z(z) = \frac{1+K}{m_z} \exp\left(-\frac{(1+K)z}{m_z} - K\right) I_0\left(2\sqrt{\frac{(1+K)Kz}{m_z}}\right) \tag{53}$$

となる。ここで、 m_z は z の平均値($=a^2+2\sigma^2$)、 K はライスファクタ($=a^2/(2\sigma^2)$)である。

実測などによって十分な数の r のデータがあって、その分布を仲上・ライス分布に近似したいときのライスファクタ K を求めたい場合には、 r^2 および r^4 の平均値(実測値)を用いて次式で算定できる[11]。(導出は、式(58b)で m を $\langle r^2 \rangle$ と $\langle r^4 \rangle$ で表し、式(61c)の m と K の関係より)

$$K = \frac{\langle r^2 \rangle \sqrt{2\langle r^2 \rangle^2 - \langle r^4 \rangle} + 2\langle r^2 \rangle^2 - \langle r^4 \rangle}{\langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2} \tag{54}$$

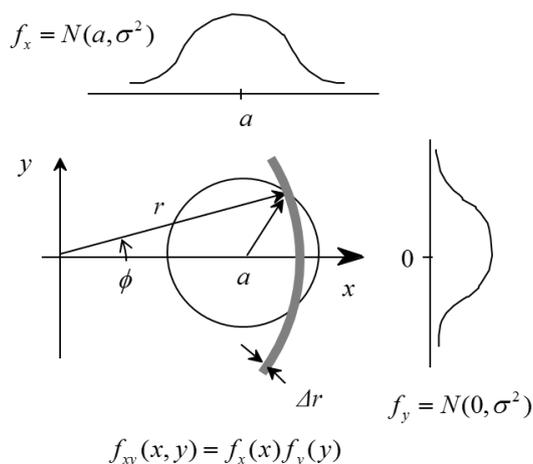
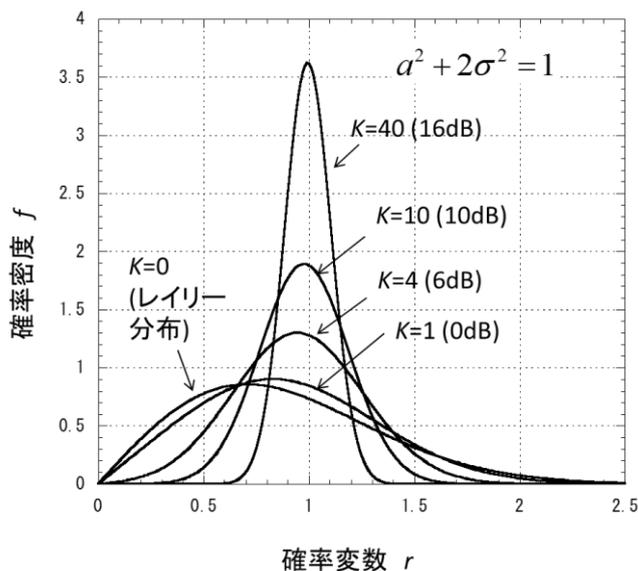
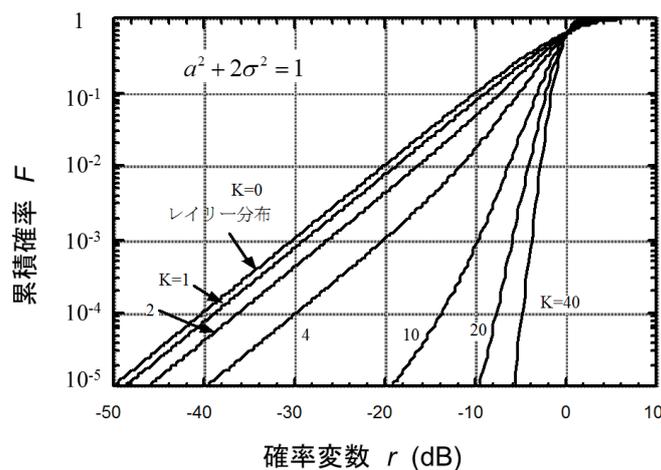


図 7 仲上・ライス分布の説明図



(a) 確率密度関数



(b) 累積分布関数

図8 仲上・ライス分布

【仲上・ライス分布：名前の由来】 [12]

1930年代後半から1940年代、不規則信号の振幅の確率分布の理論的研究は、我が国では国際電気通信株式会社（当時）の仲上稔により、米国ではベル研究所のライス（S. O. Rice）により独立に行われていた。仲上は短波の受信信号の強度分布の理論的考察から、一つの確率分布を与える式を1940年の電気通信学会誌に発表した[13]。同じ式は、ライスにより、雑音下での信号の強度分布を与える分布として、ベル研の技術雑誌BSTJに、1944/1945年に発表された[14]（一つの論文が2回に分けて発表され、当該分布が提示されているのは1945年の号）。論文誌の国際性や認知度の違いから、この分布は世界（主に欧米）では長く「ライス分布」と呼ばれてきたが、我が国先達の努力によって、「仲上・ライス分布」の呼び名が定着しつつある。（ITU-Rの文書では、仲上・ライス分布が用いられるが、IEEEの論文誌などではまだライス分布と

呼ばれることが多い)。

上述のとおり、この分布は、今日、「仲上・ライス分布 (あるいはライス分布)」と呼ばれているが、ここでは、その歴史を語るときは当時の呼び名に従って「仲上 n 分布」と呼ぶ。

定常信号と不規則信号の合成信号振幅の確率分布を考える。これは、マルチパスフェージングで言えば、i) 直接波と多数の散乱波が合成された信号の振幅、あるいは、ii) 粗面に反射された波の定常成分 (コヒーレント成分) と不規則変動成分 (インコヒーレント成分) の合成振幅であり、通信では、iii) 信号に雑音が重畳された信号の振幅の確率分布に相当する。

現在、多くの教科書や専門書において、仲上・ライス分布は、図 7 のように説明されている。本資料における式 (50), (51) の流れに従った理論展開である。我々は、このようにして、仲上・ライス分布を学んでいると思うが、仲上の導出過程はこれとは異なっている (上述の説明はライス流である)。

以下、仲上の導出過程を追う (文献 [5] § 9.4 に、その導出過程が整理してまとめられている)。短波の伝搬環境では、振幅の異なる多数の正弦波が合成されていると考える。多数の確率変数の和の分布の解析には、確率密度関数の畳み込み積分になるので、各分布を特性関数に変換 (フーリエ変換等) を行って積の形にし、そこで解析するのが常道である。そのとき、仲上はこの変換に、式 (32) で示したハンケル変換型の特性関数 (フーリエ・ベッセル変換) を利用している。

振幅 r_i の正弦波のハンケル変換は $\tilde{f}(k) = J_0(kr_i)$ (J_0 : 第一種 0 次ベッセル関数、 k : r が変換された領域での変数) となり、振幅が異なる多数の正弦波の合成波振幅 r のハンケル変換は

$$\tilde{f}(k) = \prod_{i=1}^n J_0(kr_i) \approx \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (n \gg 1) \quad (55a)$$

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^n r_i^2\right) / 2 \quad (55b)$$

となる。(55a) 式の最後の辺の式は、波の数 n が十分大きい場合の近似である。

これに振幅 a の正弦波が一つ加わった信号強度のハンケル変換型特性関数の逆変換 (確率密度関数) は

$$f(r) \approx r \int_0^\infty k J_0(rk) J_0(ak) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \quad (56a)$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \quad (56b)$$

で表される。この (56b) 式は、(51) 式と同形である。

このようにして、同時代の洋の東西で、異なる目的、異なる手法で、後の時代の移動伝搬の基本式: 仲上・ライス分布が生まれたことが興味深い。

なお、仲上を世界的に有名にしている分布は、次に示す仲上 m 分布である

4. 3 仲上 m 分布

式 (57) で与えられる分布は **仲上 m 分布** (Nakagami-m distribution) と呼ばれる。**仲上分布**、**m 分布** と呼ばれる場合もある。短波の電波伝搬の研究の過程で生まれた分布であるが、移動通信のモデルにも役立つ非常に汎用的な分布である。

$$f(r) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad (r \geq 0) \quad (\Gamma: \text{ガンマ関数}) \quad (57)$$

ここで、パラメータ m, Ω は次式で与えられる。

$$\Omega = \langle r^2 \rangle \quad (58a)$$

$$m = \frac{\langle r^2 \rangle^2}{\langle (r^2 - \langle r^2 \rangle)^2 \rangle} = \frac{\langle r^2 \rangle^2}{\langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2} \geq \frac{1}{2} \quad (58b)$$

少し歴史的に見てみよう。最近は見かけないが相対頻度という表記がある。確率密度関数の最大値（モード）を1として正規化したものである。この相対頻度を p' 、信号強度のデシベル値を χ とし、最大値1を与える χ を 0dB とする。縦軸 y 、横軸 x をおのおの

$$y = \ln p' \quad (\chi < 0), \quad y = -\ln p' \quad (\chi \geq 0) \quad (59a)$$

$$x = 1 + \frac{2\chi}{M} - \exp\left(\frac{2\chi}{M}\right) \quad (M \equiv 20 \log_{10} e) \quad (59b)$$

とすると、レイリー分布は $y=x$ の直線で表わされる（図9参照）。

仲上は、この x, y 軸をもつ特殊方眼紙上に短波のフェージングの相対頻度をプロットすると、図9のようにフェージングが強い場合も弱い場合も、直線で表わされる性質があることを見いだした[x8]。そこで、新しいパラメータ m を導入し、

$$y = mx \quad (60)$$

になる分布を求めた。信号強度を真数表現 r (≥ 0) として変数変換し、その確率密度関数を求めると、式(57)を得る。新しい分布形の誕生である。この導出は文献[1]の付録1に詳しく示している。

上記経緯から、仲上 m 分布はレイリー分布を拡張した分布であるということができる。パラメータ m は 0.5 以上の値をもち、 $m=0.5$ が半ガウス分布、 $m=1$ がレイリー分布である。 $0.5 \leq m < 1$ ではレイリー分布以上に深いレベル低下がある分布を表現できる。仲上 m 分布は、短波 (HF) 帯でのフェージングの性質から見いだされたものであるが、GHz 帯におけるマルチパスフェージングにも広く適用されることが実証されている。また、仲上・ライス分布のような特殊関数（ベッセル関数）を含まないので、他のものと組み合わせで使用する場合の解析性に優れ、移動通信のフェージング解析にもよく利用される。

図10は仲上 m 分布とその近似関係にある分布を示している。 $m > 1$ では(51)式で与えられる仲上・ライス分布と式(61)の対応で結び付けられる[15]。

$$2\sigma^2 = \frac{\Omega}{m} (m - \sqrt{m^2 - m}) \quad (61a)$$

$$a^2 = \frac{\Omega}{m} \sqrt{m^2 - m} \quad (61b)$$

$$K \left(\equiv \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) = \sqrt{m^2 - m} + m - 1 \quad (61c)$$

$$m = \frac{(K+1)^2}{2K+1} \quad (61d)$$

図11は仲上 m 分布の累積分布を $\Omega=1$ (すなわち、仲上・ライス分布の $a^2+2\sigma^2=1$ に対応) として示している。図8(b)の仲上・ライス分布との比較のため、式(61c)で定義した K に対応する m の値を括弧の中に示している。図8(b)と図11を比べてみると、 $m > 1$ においても仲上・ライス分布と仲上 m 分布が必ずしも良い近似関係ではないことがわかる。特に、累積確率分布の確率が小さい部分 (例えば 0.01 以下の部分)、すなわち r の値が小さいところで、仲上・ライス分布が、パラメータ値によらず確率の 1/10 ごとに 10dB

ずつ小さくなるのに対して、仲上 m 分布ではパラメータ値に依存した傾斜をもつ。すなわち、確率が小さい部分を評価したい場合には、二つの分布は別の分布と考えた方がよい。 $0.5 \leq m < 1$ ではレイリー分布以上に深いレベル低下がある分布を表現できる。この領域に近似的に対応する分布として仲上 q 分布がある[15]。仲上 q 分布は、独立に行われていた Bell 研の Hoyt (Hoyt) の研究[16]もあり、**ホイト分布**あるいは**仲上・ホイト分布**とも呼ばれる。

上記経緯から、仲上 m 分布は発見的手法により、レイリー分布を拡張した分布として生み出されたことになる。仲上 m 分布は短波(HF)帯でのフェージングの分布として見いだされたものであるが、近年、GHz 帯における移動伝搬でのマルチパスフェージングにも広く適用できることが実証されている。

今日では、確率変数 z がガンマ分布するとき、 $z=r^2$ とした r の分布が仲上 m 分布になることが知られている(ガンマ分布の節の式(68)を参照)。ガンマ分布は、より古くから知られていたもので、ガンマ分布する変数 z から r の分布を求めたいニーズがあれば、変数変換手法によって、ただちに、(57)式の分布形は得られたであろうが、それとは関係ないところから、発見的手法によってこの汎用的な分布が生まれた点に、歴史の面白さがある。また、当時、その経験則的性格の故に、仲上自身がその物理的意味合いを求めて思考を重ねた苦悩が、文献[17]等に滲み出ている。

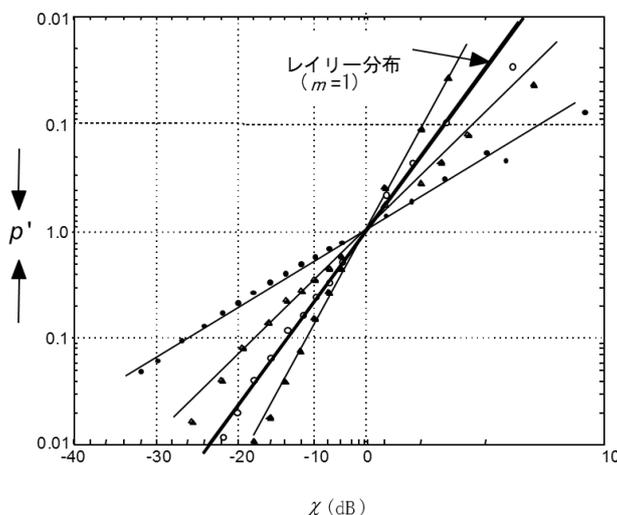


図9 仲上 m 分布のルーツである短波通信でのフェージングの相対頻度特性

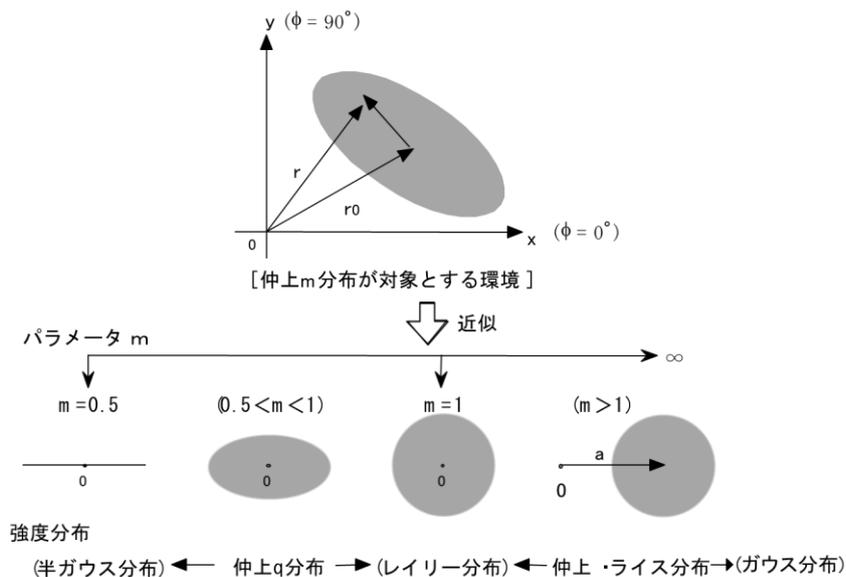


図 1 0 仲上 m 分布とその近似関係にある分布

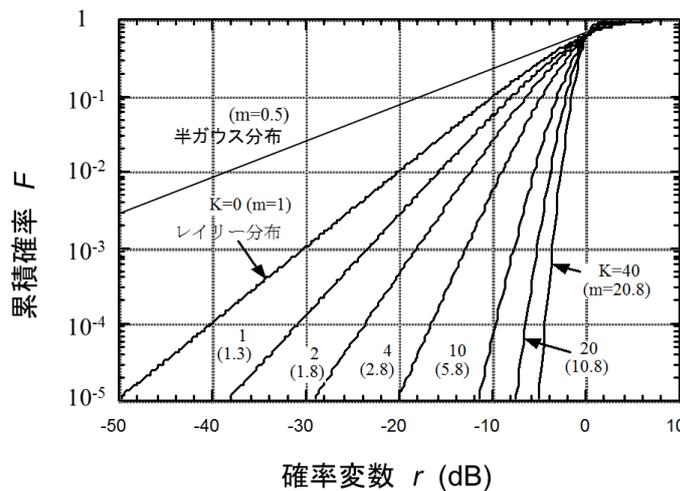


図 1 1 仲上 m 分布の累積分布 ($Q=1$)

(() 内の値が m ; 図 8 (b) の仲上・ライス分布と比較できるように K 値をあわせている)

4. 4 指数分布とポアソン分布

指数分布 (exponential distribution) の確率密度関数は式 (62) で与えられる。

$$f(z) = \lambda \exp(-\lambda z) \quad (z \geq 0) \tag{62}$$

平均値は $1/\lambda$ 、分散は $1/\lambda^2$ 、標準偏差は $1/\lambda$ 、rms 値は $\sqrt{2}/\lambda$ である。

この指数分布は、全く異なる二つの物理現象に対して現れる。一つは r がレイリー分布する変動に対して $z = r^2$ とした z の分布である。すなわち、レイリーフェージングの電力変動や SNR 変動がこの分布

となる。

もう一つは、**ポアソン過程** (Poisson process) で現われる時間の分布である。ポアソン過程とは、ある事象の発生が、それ以前的事象の発生と無関係に起きる確率過程をいう。この確率過程では、ある事象が発生する時間間隔は指数分布になる。事象の消滅もまた発生後の時間に無関係であるとする、事象の継続時間も指数分布になる。ポアソン過程においては、指数分布と**ポアソン分布** (Poisson distribution) は裏表の関係になる。単位時間当たりの事象の発生回数や任意の時間において事象が存在している数の分布がポアソン分布で、式(63)で与えられる。

$$f(n) = \frac{N^n}{n!} \exp(-N) \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (63)$$

N は分布のパラメータであり、 n の平均値および分散を与える。

実際の多重波伝搬環境において、マルチパス波の一つひとつの到来波(素波)の発生や消滅の過程をポアソン過程とする伝搬モデルが作られている[18]。実際の伝搬環境がそうであるか否かについては、さらに詳細な検証やデータ取得が必要になるが、デジタル伝送特性評価のためのシミュレーションモデルとしてはこれで十分な場合が多い。

ポアソン過程では、大部分の時間は平均到来波数に近い波が存在するが、小さい確率で波数0ということも起こり得る。“栗”の入っていない“栗ようかん”に出会うようなものである。

なお、指数分布は次節に述べるガンマ分布に含まれる分布である。(分布計算値も次節の図12に)

4.5 χ^2 分布とガンマ分布

確率変数 x_1, x_2, \dots, x_n が各々標準正規分布 $N(0,1)$ に従い、かつ、それらが独立であるとき、 $z=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ の分布は自由度 n の χ^2 分布(カイ自乗分布: chi-square distribution)と呼ばれ、検定や信頼性の評価によく用いられる。その確率密度関数は、和の分布を特性関数の積に変換する(31)式を経て求められ、式(64)になる。

$$f(z) = \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n/2-1} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \quad (\Gamma: \text{ガンマ関数}) \quad (64)$$

$n=2$ の場合は前述の指数分布であり、レイリーフェージング環境における電力変動やSN比変動を表現する分布になる。二つずつペア(1-2, 3-4, 5-6, ...)にとり、 $M(=n/2)$ 個の和の分布は、おのおのが独立なレイリー変動をする M ブランチの最大比合成ダイバーシチのSN比を与える分布になる。これは、自由度 $2M$ の χ^2 分布である。

χ^2 分布は標準正規分布に対して与えられるものなので、**スケールパラメータ** β を導入し、かつ、 $n/2$ を**形状パラメータ** ν に置き換えて表わすと、式(65)が得られる。

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu z^{\nu-1} \exp(-\beta z) \quad (65)$$

これが**ガンマ分布** (gamma distribution) である。平均値は ν/β 、分散は ν/β^2 、標準偏差は $\sqrt{\nu}/\beta$ 、rms 値は $\sqrt{\nu(\nu+1)}/\beta$ となる。パラメータ β の値が同じ二つのガンマ分布: 変数 $z_1(\nu_1)$ と変数 $z_2(\nu_2)$ には、和 z_1+z_2 の分布も $\nu_1+\nu_2, \beta$ のガンマ分布になる再生性がある。パラメータ ν が整数のガンマ分布は**アーラン分布**とも呼ばれる。

累積分布関数は以下である。

$$F(z) = \gamma(v, \beta z) / \Gamma(v) \tag{66}$$

$$\gamma(\alpha, x) \equiv \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\text{第1種不完全ガンマ関数})$$

図1 2はガンマ分布の計算例である。パラメータ $[v, \beta]$ に対して、 $[1, 1], [2, 1], [2, 3], [5, 3]$ の4つのカーブを示している。図より、 v の違い(①と②、③と④)に対してはカーブの形状が、 β の違い(②と③)に対しては横軸・縦軸の引き伸ばし率が変わる様子がわかる。 v, β が、それぞれ、形状パラメータ、スケールパラメータと呼ばれる由縁である。

ガンマ分布の特性関数は次式になる。

$$\tilde{f}(t) = \int_0^\infty e^{jzt} f(z) dz = \left(\frac{\beta}{\beta - jt} \right)^v \tag{67}$$

$v=1$ が指数分布の特性関数であるので、ガンマ分布は、 β が同じでかつ独立な v 個の指数分布の和の分布であることが、ここからも読み取れる。

z がガンマ分布するとき、 $z=r^2$ とした r の確率分布 g は、変数変換の公式((10)式)より

$$g(r) = 2rf(r^2)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(v)} \beta^v r^{2v-1} \exp(-\beta r^2) \tag{68}$$

となり、 $v \rightarrow m, \beta \rightarrow m/\Omega$ と置き換えることにより、(57)式で与えた仲上 m 分布になる。

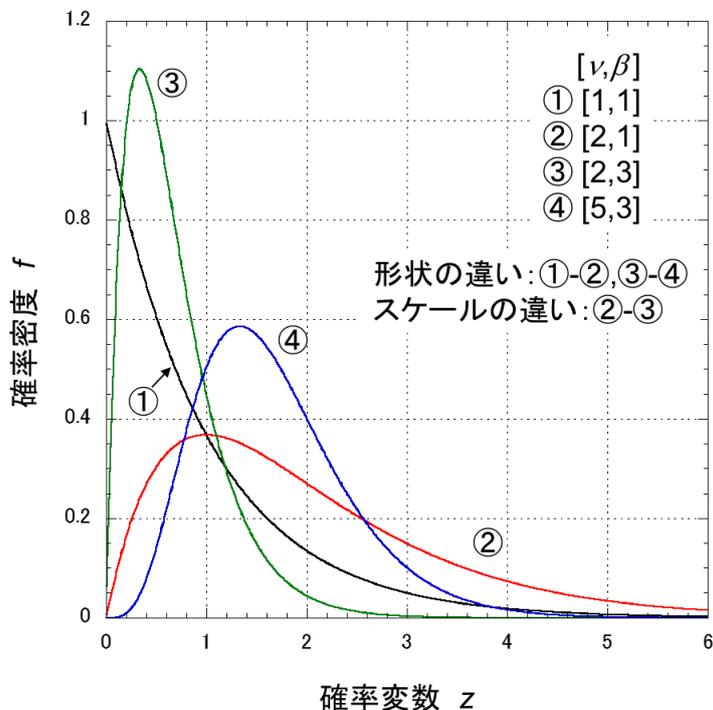


図1 2 ガンマ分布 (①は指数分布)

4. 6 ワイブル分布

ワイブル分布 (Weibull distribution) は故障率の算定など信頼性理論で使われる分布であるが、電波伝搬モデルでもレイリー分布や指数分布を包含して、広い範囲の分布を厳密に、あるいは近似式として表現できる分布として重宝がられている。その確率密度関数と累積分布関数は式(69)で与えられる。

$$f(x) = \beta m x^{m-1} \exp(-\beta x^m) \quad (x \geq 0; m, \beta > 0) \quad (69a)$$

$$F(x) = 1 - \exp(-\beta x^m) \quad (69b)$$

$m=1$ で指数分布、 $m=2$ でレイリー分布が得られる。この様に m の値によって物理的意味が違ってくるが、“ x^m が指数分布する現象における、 x の分布”と考えると全体を理解しやすい。また、“ z がレイリー分布する現象における $x=z^2/m$ の分布”とも解釈できる。すなわち、ワイブル分布は指数分布やレイリー分布を拡張したものと位置付けられる。

信頼性の分野では、時刻 t まで故障しない確率を式(69b)より、 $\exp(-\beta t^m)$ と定める。 $m=1$ のときは、時間に対して故障率が一定となる性質 (指数分布に従うポアソン過程)、すなわち偶発的な故障を扱う。これに対して、 $m < 1$ では時間と共に故障率が小さくなる場合 (=初期不良による故障)、 $m > 1$ では時間と共に故障率が大きくなる場合 (=磨耗的な故障) を扱う。物理的にはこのような意味がある。

理論から導かれるものではないが、2つのパラメータ値を適当に定めることによって、多様な分布形が表現できるため、レーダ観測における海面クラッタ、地面クラッタの強度の分布などに用いられている[19]。

なお、これまでの分布の説明で、確率変数を x, r, z と文字を変えてきた。数学的にはこの違いは意味がない。電波伝搬モデルでは、 r は信号の振幅、 $z (=r^2)$ は電力の次元の物理量に対応する場合が多いため、便宜的に使い分けてきただけである。ワイブル分布では、この次元が異なる物理量の一つの変数で表す分布であるので、一般的な意味で、 x を用いている。

4. 7 ラプラス分布

ラプラス分布 (Laplacian distribution) は式(70)で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|x-m|}{\sigma}\right) \quad (70)$$

ここで、 m は平均値、 σ は標準偏差である。式からわかるようにこの形は、**両側指数分布**とも呼ばれる。移動伝搬では、基地局から移動体方向を見たとき、その電波の到来方向の平均角度特性が、移動体方向を中心にして両側に指数関数で減衰する形になることが測定によって明らかになり[20]、基地局到来波の角度分布にラプラス分布が使われるようになっていく。

4. 8 一般化ガンマ分布 (Stacy 分布)

4. 8. 1 多重波伝搬モデル基本分布とその関係

多重波伝搬モデルの中の最も基本となるモデルは、レイリーフェージングであり、それに関連する確率分布は、正規分布、レイリー分布、指数分布、仲上 m 分布、ガンマ分布である。この五つについて関係を整理する。図 1 3 はこの関係をまとめている。

レイリー分布 (確率変数 r) は 2 次元正規分布 (確率変数 x, y) の振幅の分布を表す。電力 $z=r^2$ としたときの z の分布は指数分布であり、パラメータ $\nu=1$ のガンマ分布でもある。ゆえに、指数分布を含むガンマ分布は電力次元の物理量 (電力、SN 比など) を表す。最大比合成ダイバーシチでは、物理量として $z=r_1^2+r_2^2+\dots+r_M^2 (=z_1+z_2+\dots+z_M)$ を扱うが、お互いの変動が独立であれば、この分布は $\nu=M$ のガンマ分布に従う。 $z=r^2$ としたときの振幅次元量 r の分布は仲上 m 分布に従う。移動通信の多重波伝搬理論に出てくる確率分

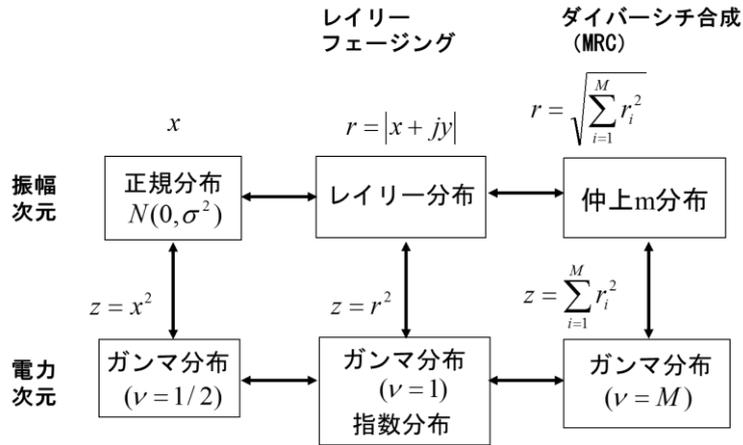


図 1 3 正規分布から派生する基本分布の相互の関係

布は、基本的には、この5つの分布と仲上・ライス分布および対数正規分布である。

4. 8. 2 伝搬モデルに共通する汎用分布形：一般化ガンマ分布 (Stacy 分布)

正規分布をルーツとして生まれた確率分布の概要を述べてきたが、それをみると、大部分の分布が式(71)の形で表現できることに気づくであろう。

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma) = Ax^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ for } 0 \leq x < \infty) \quad (71a)$$

$$A \equiv \frac{\gamma \beta^{\alpha/\gamma}}{\Gamma(\alpha/\gamma)} \quad (71b)$$

この式はガンマ分布を一般化したものとして Stacy により提示されている[21]。ゆえに、ここでは、一般化ガンマ分布 (generalized Gamma distribution または Stacy distribution) と呼ぶ。例えば、仲上 m 分布では (α, β, γ) に対して $(2m, m/\Omega, 2)$ 、ワイブル分布では (m, β, m) であるので、A はそれぞれ 式(71b)の計算によって 式(57), (69)中の $2m^m / \{\Gamma(m)\Omega^m\}$ 、 βm が得られる。

この分布の、平均 $\langle x \rangle$ 、自乗平均 $\langle x^2 \rangle$ 及び分散 σ_x^2 は、おのおの次式となる。

$$\langle x \rangle = \frac{\Gamma\{(\alpha+1)/\gamma\}}{\Gamma(\alpha/\gamma)\beta^{1/\gamma}} \quad (72a)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\Gamma\{(\alpha+2)/\gamma\}}{\Gamma(\alpha/\gamma)\beta^{2/\gamma}} \quad (72b)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha/\gamma)\beta^{2/\gamma}} \left[\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\gamma}\right) - \frac{[\Gamma\{(\alpha+1)/\gamma\}]^2}{\Gamma(\alpha/\gamma)} \right] \quad (72c)$$

表 1 はこの節で挙げた分布のうち、一般化ガンマ分布に含まれるものを、 α, β, γ, A についてまとめている。ただし、正規分布については、式(71)は半ガウスの分布で一般的ではないので、表では $N(0, \sigma^2)$ のものを示している。

3パラメータで構成される一般化ガンマ分布は、大部分の分布を含む故に、直接に物理的意味を述べることは難しい。パラメータの特徴として、 α と β はガンマ分布の場合と同様、それぞれを“形状パラメータ”、

“スケールパラメータ”と呼ぶのがふさわしい。 γ は“次元パラメータ”（的なもの）で、 $\gamma=1$ では電力次元の変動を、 $\gamma=2$ では振幅次元の変動を表わす場合が多い。ワイブル分布はこの次元パラメータを変数として取り入れている点に、ほかにみられない特徴がある。

一般化ガンマ分布は、仲上 m 分布やガンマ分布における次元パラメータに関する一般化、あるいは、ワイブル分布における形状パラメータと次元パラメータとの拘束条件の除去による一般化として特徴付けられる。

表1 一般化ガンマ分布 $[Ax^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\gamma)]$ に含まれる分布の整理

分布名	α	β	γ	A	変数 x とパラメータ範囲	備考
正規	1	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$-\infty < x < \infty$ $\sigma > 0$	平均値0のタイプ
レイリー	2	$\frac{1}{2\sigma^2}$	2	$\frac{1}{\sigma^2}$	$x \geq 0$ $\sigma > 0$	$m=1$ の仲上 m 分布 $m=2$ のワイブル分布
指数	1	β	1	β	$x \geq 0$ $\beta > 0$	$n=1$ のガンマ分布 $n=2$ の χ^2 分布 $m=1$ のワイブル分布
ガンマ	ν	β	1	$\frac{\beta^\nu}{\Gamma(\nu)}$	$x \geq 0$ $\beta > 0, \nu > 0$	
χ^2	$\frac{n}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$	$x \geq 0$ $n > 0$	$\nu = \frac{n}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ のガンマ分布
仲上 m	$2m$	$\frac{m}{\Omega}$	2	$\frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m}$	$x \geq 0$ $\Omega > 0, m \geq \frac{1}{2}$	
ワイブル	m	β	m	βm	$x \geq 0$ $\beta > 0, m > 0$	

5. 重畳分布・複合分布

5.1 重畳分布の基本式

比較的短時間の現象がある確率分布 f_0 に従って発生し、より長期的にみるとその確率分布のパラメータ値がさらに別の分布 $f_{\text{parameter}}$ に支配されているような現象における、全体としての確率分布を**重畳分布**と呼ぶ。式(73)はその一般的な表現である。

$$f(x) = \iiint_{u,v,w,\dots} f_0(x; u, v, w, \dots) f_{\text{parameter}}(u, v, w, \dots) du dv dw \dots \quad (73)$$

上式で与えられる重畳分布の中には、 $x = x_0 u$ ($u > 0$)のように、二つの現象 (x_0 が確率分布する現象と u が確率分布する現象) が独立で、かつ、積の形で表される現象が多い。変数 x_0 の確率分布を $f_{x_0}(x_0)$ とすると、式(73)中の f_0 は、変数変換の式(33)より、 $f_{x_0}(x_0)/|u|$ で置き換えることができ、式(74)に整理される。

$$f(x) = \int_u f_{x_0}\left(\frac{x}{u}\right) f_u(u) \frac{1}{|u|} du \quad (x = u x_0 \text{ のとき}) \quad (74)$$

ここで、 f_u は u の確率分布である。式(33)は、独立な二つ変数の積の分布として与えた式(23)そのものであり、式(74)と辻褃が有っている。

この二つ確率変数の掛け算の分布は、例えば、レイリー分布の信号を受信し、そのまま増幅して再放射する Amplitude & Forward 型リレー局からの受信信号の強度のようなダブルレイリー分布はイメージしやすいが、次項以降で述べる Suzuki 分布や K 分布もこのタイプに含まれる。

5. 2 レイリー・対数正規重畳分布：Suzuki 分布

市街値における移動伝搬では、短区間での強度変動がレイリー分布に従い、そのパラメータである平均電力 (σ^2) が長区間で見ると対数正規分布するというモデルが一般的に用いられる。この分布はレイリー・対数正規重畳分布であり、Suzuki (鈴木) 分布とも呼ばれ、式(75)で与えられる[22]。

$$f(x; \mu, \lambda) = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi\lambda\sigma^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{(\ln\sigma - \mu)^2}{2\lambda^2}\right\} d\sigma \quad (75)$$

μ と λ は分布のパラメータで、 $\ln\sigma$ の平均値と標準偏差を与える。 $\lambda=0$ の極限 (すなわち σ が一定の場合) において、 $2\sigma^2=1$ (=0dB) で与えられるレイリー分布に一致するよう μ を定めると、 $\mu=(\ln 2)/2$ である。この場合の累積分布は式(76)となる。

$$F\left(x \leq x_0; \mu = -\frac{\ln 2}{2}, \lambda\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - x_0^2 \exp(-2\lambda u)\right\} du \quad (76)$$

移動通信の短区間中央値変動の様に、dB 値変動の標準偏差 $\sigma_{\sigma\text{-dB}}$ (dB) が与えられる場合には、 $\lambda=\sigma_{\sigma\text{-dB}}/(20 \log e)$ (=0.115 $\sigma_{\sigma\text{-dB}}$) において分布が計算できる。市街地等での移動通信では $\sigma_{\sigma\text{-dB}}=6$ [dB] が目安値とされる[9], [23]。この分布の、物理的意味は明確であるが、積分を含んでいて計算しやすい形でないため、仲上 m 分布やワイブル分布、あるいは次節で述べる K 分布で近似する方法も試みられている。 σ の変動が比較的大きいときは、全体を対数正規分布 (正規確率紙上で直線になる) で近似して良い (計算例：文献[1]の図 3. 13)。

5. 3 レイリー・ガンマ分布重畳分布：K 分布

式(73)の $f_0(x;a)$ がレイリー分布 (a はパラメータで式(47)の σ^2 に対応)、 $f_p(a)$ がガンマ分布 (式(65)) となる重畳分布は式(77)で表される。

$$f(x; \alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x}{y} \exp\left(\frac{-x^2}{2y}\right) \frac{\beta^\nu}{\Gamma(\nu)} y^{\nu-1} \exp(-\beta y) dy = \frac{2^{(3-\nu)/2} \beta^{(\nu+1)/2}}{\Gamma(\nu)} x^\nu K_{\nu-1}(\sqrt{2\beta} x) \quad (77)$$

ここで、 K_n は n 次の第二種変形ベッセル関数である。

この分布は **K 分布** と呼ばれる。レーダによる海面クラッタや光波のシンチレーション解析のために生まれたものであるが[24], [25]、移動通信の分野では、前項の Suzuki 分布を代替するものとして利用される[26]。これは、Suzuki 分布が対数正規分布を含むことによって、積分を含まない閉形式で記述することができず、伝送特性評価に用いる際の解析性に不便であるということのためであり、対数正規分布をガンマ分布で近似したというものである。文献[26]の Fig. 1 では、対数正規分布とガンマ分布の比較を、パラメータを対応させて評価しているが (式(77)のパラメータ ν, β が文献[26]の式(3)の $\beta+1, 1/(2\alpha^2)$ に対応)、パラメータ ν の値が小さいとき (例えば、1.5 以下 (文献[26]の Fig. 1 の β の0.5以下)) にはずれも目立つので、この目的で利用するときは、誤差の影響を調べながら利用してほしい。

5. 4 その他の重畳分布

移動体衛星通信では、樹木の繁る道路を動く時の信号強度の分布として、**Loo 分布** (Loo distribution) [8]

ここで、上付き文字 T は転置を表す。 \mathbf{m} は、各変数の平均値を要素とする平均値ベクトル、 \mathbf{V} は $n \times n$ 対称行列で、その i 行 j 列成分 v_{ij} は、 x_i, x_j の標準偏差： σ_i, σ_j とその相関係数 ρ_{ij} により、式 (80) で与えられる。

$$v_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (80)$$

行列 \mathbf{V} は、各成分が二つの変数の共分散を表しているため、**共分散行列** (covariance matrix) と呼ばれる。この**多次元正規分布**は $N_n(\mathbf{m}, \mathbf{V})$ と表記されることもある。

2次元正規分布では、式 (81) のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} & f_2(x_1, x_2; m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2, \rho_{12}) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left\{ \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

お互いの変動が無相関の場合、 $\rho_{12}=0$ なので、結合確率密度関数は、それぞれの確率密度関数 (= 1次元正規分布) の積になる。

$$f_2(x_1, x_2; m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2, 0) = f_1(x_1; m_1, \sigma_1) f_2(x_2; m_2, \sigma_2) \quad (82)$$

多次元正規分布は、アレーアンテナでの電波受信、例えばスペースダイバーシチやアダプティブアレーの信号処理時に使われる。

実際のアレー信号処理や信号生成のために、以下の二つのことを知っておくと便利である。

① 確率変数ベクトル \mathbf{x} が n 次元正規分布 $N_n(\mathbf{m}, \mathbf{V})$ に従うとき、 $\mathbf{z} = (\mathbf{V}^{1/2})^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})$ は標準型 $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ に従う。

② 確率変数ベクトル \mathbf{z} が標準型 n 次元正規分布 $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ に従うとき、 $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{V}^{1/2}\mathbf{z}$ は $N_n(\mathbf{m}, \mathbf{V})$ に従う。

①は相関のある変動を無相関の変動に変える変換であり、変換後の信号を用いることによって、解析が格段に容易になる。②は無相関の変動から、任意の相関行列で与えられる有相関の変動を作り出す場合に便利で、フェージングシミュレータや MIMO チャネルモデルなどに応用ができる。

7. ウィシャート分布

7. 1 ウィシャート行列固有値の確率分布

行列の要素が何らかの確率分布に従う確率変数 (乱数) として与えられる行列は**ランダム行列** (random matrix) と呼ばれる。 $N \times M$ のランダム行列を \mathbf{A} と置く。本章で扱う行列の要素 a_{nm} のそれぞれは振幅と位相で表される複素量であり、以下で与える。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \equiv \{a_{nm}\} \quad (83)$$

この行列 \mathbf{A} から、以下の二つのエルミート行列 (行列の ij 成分と ji 成分が共役複素量の関係をもつ正方行列) を作ることができる。

$$\mathbf{R}_l = \mathbf{A}^H \mathbf{A}, \quad \mathbf{R}_r = \mathbf{A} \mathbf{A}^H \quad (84a, b)$$

\mathbf{R}_t は $M \times M$ の、 \mathbf{R}_r は $N \times N$ の正方行列になる。この、 $\mathbf{R}_t, \mathbf{R}_r$ は **ウィシャート行列**(Wishart matrix) と呼ばれる。ウィシャート行列には、 \mathbf{R}_t では M 個の、 \mathbf{R}_r では N 個の固有値がある。ウィシャート行列がエルミート行列であり、かつ、対角要素が非負であるので、全ての固有値は非負の実数値である。固有値の大きい順に $i=1, 2, \dots$ と番号を付けると、 \mathbf{R}_t の λ_{ti} 、 \mathbf{R}_r の λ_{ri} について、 M と N の少ない方の個数 p ($=\min\{M, N\}$) までは、 $\lambda_{ti} = \lambda_{ri}$ となり、サイズが大きい方の行列の残りの固有値は値が全て 0 になる。無線通信において、送受信の双方にアレーアンテナを有する MIMO(multi-input multi-output : 多入力・多出力)システムの通信性能評価では、この固有値が重要な働きを示す。ウィシャート行列の各要素や固有値の確率分布は総称して **ウィシャート分布**(Wishart distribution) と呼ばれる。固有値に付した下付き添字 t, r を外して、値の大きい順に、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ とするとき、これは、**順序付固有値** と呼ばれる。また、これらの順序を区別せず固有値全部をまとめて扱う場合には、**順序無固有値** と呼ばれる。

ウィシャート行列の最も基本は、元になる行列 \mathbf{A} の要素が全て独立な複素ガウス分布 (independent identically-distributed: i.i.d.) であるランダム行列である。i.i.d. 要素で構成されるウィシャート行列の固有値の確率分布は、式 (85), (86) によって定められる [30]–[33]。

順序付固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, p$) の確率密度関数 f_i^{ord} は、

$$f_i^{ord}(\lambda_i) = \int_{\lambda_2}^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_{\lambda_i}^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\lambda_i} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{\lambda_{p-1}} d\lambda_p f^{ord}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p) \quad (85a)$$

$$f^{ord}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p) = c \exp\left(-\sum_{i=1}^p \lambda_i\right) \prod_{i=1}^p \lambda_i^{q-p} \prod_{j=i+1}^p (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (85b)$$

$$p \equiv \min\{M, N\}, \quad q \equiv \max\{M, N\}$$

c : 式 (85b) の積分値を 1 にするための正規化ファクタ

順序無固有値 λ の確率密度関数 f_i^{unord} は

$$\begin{aligned} f_i^{unord}(\lambda_i) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_j^{ord}(\lambda_i) \\ &= \int_0^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_0^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\infty} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{\infty} d\lambda_m f^{unord}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m) \end{aligned} \quad (86a)$$

$$f^{unord}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m) = \frac{1}{m!} f^{ord}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m) \quad (86b)$$

$$(f_1^{unord}(\lambda_1) = f_2^{unord}(\lambda_2) = \cdots = f_m^{unord}(\lambda_m))$$

順序無固有値の分布は、さらに書き下された式があるが [33]、そこから直接求める機会は少ないと思うので省略する。

順序無、順序付のどちらの固有値分布についても、行列のサイズが大きくなると、項数も増え、最大固有値や最小固有値の分布を除いて具体的な式を求めることが困難になる。厳密な証明は与えられていないが、順序付固有値について、最大固有値の分布から、共通の法則に従って第 2 固有値以下を徐々に求めてゆく方法が文献 [34] に示されているので、 N, M の値があまり大きくない範囲で具体的な固有値分布を求めたいときには有用である。

MIMO で比較よく使われる範囲の固有値の確率分布を以下に示す。 λ_i は順序付固有値の i 番目の固有値、 λ は、順序無の固有値である。なお各式の値は、ランダム行列 \mathbf{A} の各要素の平均電力が 1 になるように正規化したものである。

固有値の確率分布

[2×2]

順序付固有値

$$f_1(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1)e^{-\lambda_1} + \phi_2(\lambda_1)e^{-2\lambda_1} \quad [\text{平均値} : 3.5] \quad (87a)$$

$$f_2(\lambda_2) = -\phi_2(\lambda_2)e^{-2\lambda_2} \quad [\text{平均値} : 0.5] \quad (87b)$$

$$\phi_1(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\phi_2(\lambda) = -2$$

順序無固有値

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\phi_1(\lambda)e^{-\lambda} \quad [\text{平均値} : 2] \quad (88)$$

[2×3]または[3×2]

$$f_1(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1)e^{-\lambda_1} + \phi_2(\lambda_1)e^{-2\lambda_1} \quad [\text{平均値} : 39/8] \quad (89a)$$

$$f_2(\lambda_2) = -\phi_2(\lambda_2)e^{-2\lambda_2} \quad [\text{平均値} : 9/8] \quad (89b)$$

$$\phi_1(\lambda) = 0.5\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 6)$$

$$\phi_2(\lambda) = -\lambda(\lambda + 3)$$

順序無固有値

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\phi_1(\lambda)e^{-\lambda} \quad [\text{平均値} : 3] \quad (90)$$

[2×4]または[4×2]

順序付固有値

$$f_1(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1)e^{-\lambda_1} + \phi_2(\lambda_1)e^{-2\lambda_1} \quad [\text{平均値} : 99/16] \quad (91a)$$

$$f_2(\lambda_2) = -\phi_2(\lambda_2)e^{-2\lambda_2} \quad [\text{平均値} : 29/16] \quad (91b)$$

$$\phi_1(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{1}{6}\lambda^2 - \lambda + 2 \right)$$

$$\phi_2(\lambda) = -\lambda^2 \left(\frac{1}{6}\lambda^2 + \lambda + 2 \right)$$

順序無固有値

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\phi_1(\lambda)e^{-\lambda} \quad [\text{平均値} : 4] \quad (92)$$

[3×3]

順序付固有値

$$f_1(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1)e^{-\lambda_1} + \phi_2(\lambda_1)e^{-2\lambda_1} + \phi_3(\lambda_1)e^{-3\lambda_1} \quad [\text{平均値} : 313/48] \quad (93a)$$

$$f_2(\lambda_2) = -\phi_2(\lambda_2)e^{-2\lambda_2} - 2\phi_3(\lambda_2)e^{-3\lambda_2} \quad [\text{平均値} : 103/48] \quad (93b)$$

$$f_3(\lambda_3) = \phi_3(\lambda_3)e^{-3\lambda_3} \quad [\text{平均値} : 1/3] \quad (93c)$$

$$\phi_1(\lambda) = 0.25\lambda^4 - 2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 6\lambda + 3$$

$$\phi_2(\lambda) = -0.5\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 6$$

$$\phi_3(\lambda) = 3$$

順序無固有値

$$f(\lambda) = \frac{1}{3}\phi_1(\lambda)e^{-\lambda} \quad [\text{平均値} : 3] \quad (94)$$

[4×4]

順序付固有値

$$f_1(\lambda_1) = \phi_1(\lambda_1)e^{-\lambda_1} + \phi_2(\lambda_1)e^{-2\lambda_1} + \phi_3(\lambda_1)e^{-3\lambda_1} + \phi_4(\lambda_1)e^{-4\lambda_1} \quad [\text{平均値} : 9.77228] \quad (95a)$$

$$f_2(\lambda_2) = -\phi_2(\lambda_2)e^{-2\lambda_2} - 2\phi_3(\lambda_2)e^{-3\lambda_2} - 3\phi_4(\lambda_2)e^{-4\lambda_2} \quad [\text{平均値} : 4.40856] \quad (95b)$$

$$f_3(\lambda_3) = \phi_3(\lambda_3)e^{-3\lambda_3} + 3\phi_4(\lambda_3)e^{-4\lambda_3} \quad [\text{平均値} : 1.56916] \quad (95c)$$

$$f_4(\lambda_4) = -\phi_4(\lambda_4)e^{-4\lambda_4} \quad [\text{平均値} : 1/4] \quad (95d)$$

$$\phi_1(\lambda) = \frac{1}{36}\lambda^6 - \frac{1}{2}\lambda^5 + \frac{7}{2}\lambda^4 - \frac{34}{3}\lambda^3 + 18\lambda^2 - 12\lambda + 4$$

$$\phi_2(\lambda) = -\frac{1}{72}\lambda^8 + \frac{1}{18}\lambda^7 - \frac{4}{9}\lambda^6 + \frac{4}{3}\lambda^5 - \frac{4}{3}\lambda^4 + \frac{8}{3}\lambda^3 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 12$$

$$\phi_3(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda^6 + \frac{5}{6}\lambda^5 + \frac{23}{6}\lambda^4 + \frac{14}{3}\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 12$$

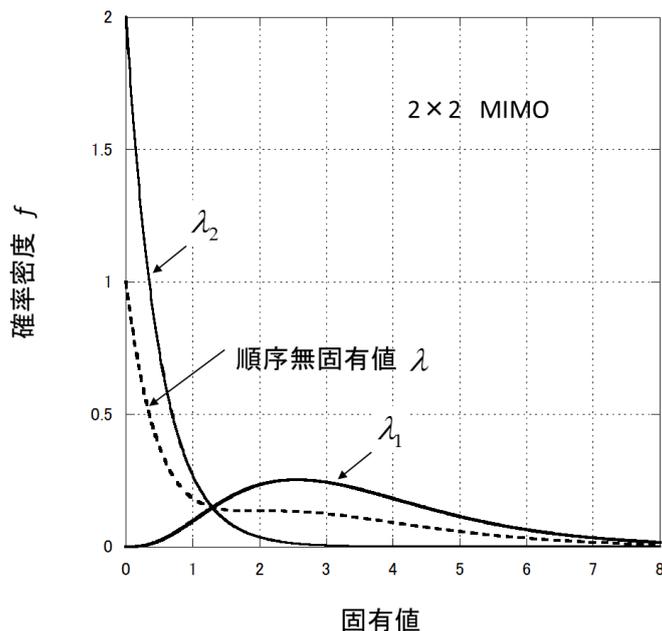
$$\phi_4(\lambda) = -4$$

順序無固有値

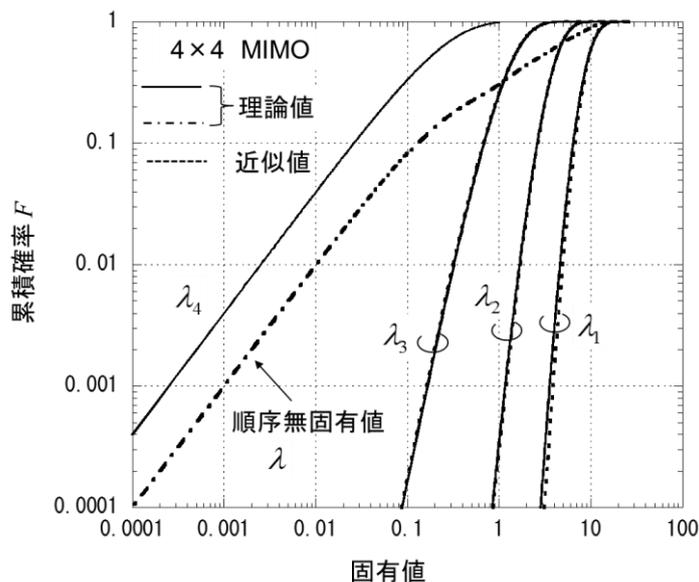
$$f(\lambda) = \frac{1}{4}\phi_1(\lambda)e^{-\lambda} \quad [\text{平均値} : 4] \quad (96)$$

式の形からわかるように、順序無固有値分布の形は、順序付固有値の第一固有値の ϕ_1 の項に含まれている。また、第2固有値以下の式に含まれる項は第一固有値の項にすべて含まれている。順序付固有値の平均値の和は MN 、順序無固有値の平均値は $MN/\min\{M, N\}$ である。

図1-4は $N=M$ のウィシャート行列の固有値の確率分布の一例を示している。図(a)は $N=M=2$ (2×2 MIMO)の固有値の確率密度関数を、順序付と順序なしで比較して示している。順序無し固有値が、二つの順序付固有値分布の平均値となっていることがわかる。図(b)は $N=M=4$ (4×4 MIMO)の累積分布関数で、実線は順序付の四つの固有値、一点鎖線は順序無固有値の分布である。各固有値のダイバーシチオーダが読み取れるように、縦軸・横軸とも対数メモリにしている。図(b)には、順序付固有値について、次節で述べるガンマ分布近似のカーブも点線で加えている。この近似式では、第一固有値～第四固有値のダイバーシチオーダ(=ガンマ分布パラメータ ν の値)は、それぞれ、16, 9, 4, 1となっているが、理論値はこれと非常によい一致を示している。順序無固有値は、四つの順序付固有値分布を縫うような形になっているが、累積確率の小さい部分では第四固有値のダイバーシチオーダに漸近している。



(a) 2x2 MIMO の確率密度関数



(b) 4x4 MIMO の累積分布関数 (破線は近似式(97)による)

図 1 4 ウィンシャート行列の固有値の確率分布

7. 2 近似的考え方

ウィンシャート行列の順序付固有値の確率分布は、ガンマ分布によって良い精度で近似できる [34]。N×M のランダム行列における固有値λ_iの確率分布は、式(97)である。

$$f_i(\lambda_i) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu)} (\nu / \langle \lambda_i \rangle)^\nu \lambda_i^{\nu-1} \exp \{ -(\nu / \langle \lambda_i \rangle) \lambda_i \} \tag{97}$$

$$\nu = (M - i + 1)(N - i + 1)$$

パラメータ ν はそのダイバーシチオーダを与える。第一固有値の確率分布では、ダイバーシチオーダが MN に、第二固有値では $(M-1)(N-1)$ 、というように順次低下してゆくことを示している。図 1 4 (b) に、式 (97) で求めた近似式での計算結果（各固有値の平均値は式 (95) に示した理論値を使用）を点線で示している。第四固有値は、理論式と近似式が同一である。文献 [34] では、この例 (4×4) を含めて、近似式の精度を、様々な MIMO 構成に対して理論分布と比較しているが、いずれの場合もきわめてよい近似精度になっていることが確認されている。

7. 3 漸近固有値分布：マルチェンコ・パスツール則

MIMO のアレー規模が大きくなる (Massive MIMO と呼ばれる) と、固有値の確率分布を式 (85) や (86) で求めることが煩雑になって、そのようなアプローチには限界がある。一方、アンテナ素子数が十分多いという前提に立った漸近的な確率分布を求めるアプローチがある。本節では、これを簡単に述べる。漸近固有値分布のより深い知識を得るためには、ランダム行列を扱った専門書（例えば文献 [6], [35], [36]）で学んでほしい。

対象とする土俵は、前項で学んだ (84) 式で表現されるウィシャート行列の順序無の固有値で、かつ、元になる $N \times M$ の行列 A の各要素は無相関 (i.i.d.) のランダム行列である。

行列 A の N と M の比を β とし、そのもとでの $M \rightarrow \infty$ でのウィシャート行列の順序無正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の漸近固有値分布 $f(\hat{\lambda})$ を考える。

$$\beta \equiv N / M \tag{98a}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda / M \tag{98b}$$

$$f(\hat{\lambda}) = \lim_{M \rightarrow \infty} M f_i^{unord}(M\hat{\lambda}) \tag{98c}$$

順序無正規化固有値の確率分布は、マルチェンコ・パスツール則 (Marcenko-Pastur (MP) law) と呼ばれる式 (99) で与えられる (この解説は [6], [36])。

$$f(\hat{\lambda}) = (1 - \beta)^+ \delta(\hat{\lambda}) + \frac{\sqrt{(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}_-)^+ (\hat{\lambda}_+ - \hat{\lambda})^+}}{2\pi\hat{\lambda}} \tag{99}$$

$$\hat{\lambda}_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\beta})^2$$

$$(z)^+ \equiv \max(0, z)$$

右辺第 1 項のデルタ関数 δ は、 $M > N$ で $A^H A$ の固有値を求める場合に、値が 0 となる固有値を含むことによるものであるため、以下では、 $M \leq N$ 、すなわち $\beta \geq 1$ に限定して、右辺第 2 項のみで考える。その時、式 (99) は式 (100) のようにも書ける。

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta - (\hat{\lambda} - 1 - \beta)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} & \text{for } (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \hat{\lambda} \leq (1 + \sqrt{\beta})^2 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \tag{100}$$

$\beta = 1$ ($M = N$) の場合には、簡単になって、

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\hat{\lambda}} - 1} & \text{for } 0 \leq \hat{\lambda} \leq 4 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \tag{101}$$

となる。

累積分布関数は式(102)である[37] (積分解法は「岩波数学公式 I」より)。

$$F(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{-\hat{\lambda}^2 + 2(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2} - (1+\beta) \sin^{-1} \left(\frac{1+\beta-\hat{\lambda}}{2\sqrt{\beta}} \right) - |1-\beta| \sin^{-1} \left(\frac{(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2}{2\sqrt{\beta}\hat{\lambda}} \right) + \pi \right\} \quad (102)$$

$N=M$ である $\beta=1$ の場合には、

$$F(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{\lambda}(4-\hat{\lambda})} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (103)$$

となる。

図 1 5 は、式(100)で与えられる固有値の確率密度関数を、 β をパラメータとして示している。それぞれ、正規化固有値が限定された範囲に収まることが興味深い ($\beta=1$ では 0~4、 $\beta=4$ では 1~9 の範囲)。 M が十分大きい仮定で導かれた式であるが、 $M=N=4$ 程度の、十分に大きいとは言えない規模でも、確率密度関数や累積分布関数が、漸近固有値分布にかなりの精度で近づいていることが調べられており[37]、式(100)の適用範囲は広い。

図 1 6 は式(102)で与えられる正規化固有値の累積分布関数を β をパラメータとして示している。近年、その技術に注目が集まっている Massive MIMO では、一方の (=基地局側の) アレーアンテナ素子数が 100 ~1000、もう一方の (=端末側の) 素子数が 10 素子以内のようなアンバランスな利用形態が想定されている。すなわち、 $\beta \gg 1$ である。同図より、 β の値が大きくなるほど、固有値の相対的な変化幅が小さくなり、安定した通信路が確保できることがわかる。

固有値特性が把握できれば、デジタル伝送特性 (通信路容量やビット誤り率など) の評価に進むことができ、その具体的な解析については文献[1] (特に 9 章) を見てほしい。

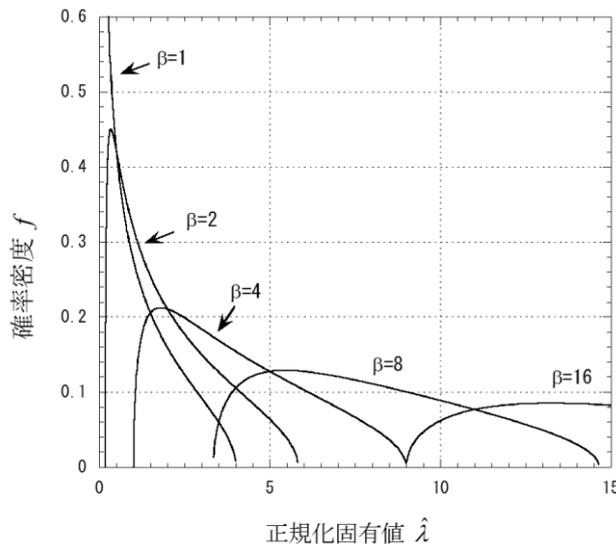


図 1 5 漸近固有値分布

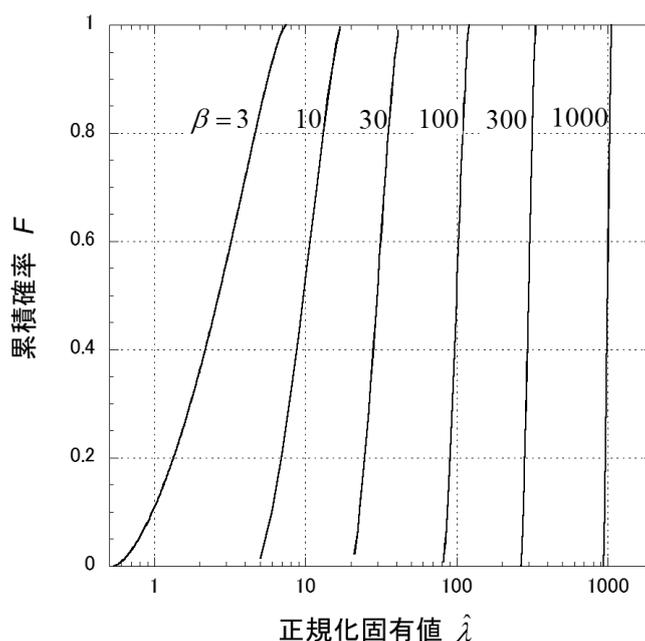


図1.6 入出力ポート数比 (β) が大きい場合の正規化固有値の累積分布特性

全般的に参考にした文献

- [1] 唐沢好男, 改訂: デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.
- [2] 細矢良雄 (監修), 電波伝搬ハンドブック (11章), リアライズ社, 1999.
- [3] 和達三樹, 十河清, キーポイント確率・統計, 岩波書店, 1993.
- [4] 伏見正則, 確率と確率過程, 講談社, 1987.
- [5] 奥井重彦, 電子通信工学のための特殊関数とその応用, 森北出版, pp. 154-157, 1997.
- [6] 渡辺澄夫他, ランダム行列の数理と科学 (第4章 (田中利幸著)), 森北出版, 2014.
- [7] 芝祐順, 渡部洋, 石塚智一, 統計用語事典, 新曜社, 1984.

引用文献

- [8] C. Loo, "A statistical model for a land mobile satellite link," IEEE Trans. Vehicular Tech., vol. VT-34, 3, pp.122-127, 1985.
- [9] 奥村善久他, "陸上移動無線における伝搬特性の実験的研究," 研実報, vol. 16, 9, pp. 1705-1764, 1967.
- [10] 岩井誠人, 移動通信における電波伝搬, コロナ社, 2012.
- [11] L. J. Greenstein, D. G. Michelson, and V. Erceg, "Moment-method estimation of the Ricean-Factor," IEEE Commun. Lett., vol. 3, no. 6, 1999.
- [12] 唐沢好男, "電波伝搬: 物理現象とモデリング -先達の足跡をたどる-", 信学誌, vol. 99, no. 8, pp. 792-798, 2016.
- [13] 仲上稔, "位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究 (その2)," 電気通信学会誌, no. 202, 1940.01.
- [14] S. O. Rice, "Mathematical analysis of random noise," Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, 1994, and vol. 24, no. 1, pp. 46-156, 1945.
- [15] 仲上稔, 佐々木哲夫, "位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察," 電気通信学会誌, No. 228, pp. 205-213, 1942.

- [16] R.S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," *Bell Sys. Tech. Jour.*, vol. 26, 2, pp. 318-359, 1947.
- [17] 仲上稔、和田俊介、藤村茂幸, "不規則位相問題について," *電気通信学会誌*, pp. 1-8, 1953.11.
- [18] H. Iwai and Y. Karasawa, "Wideband propagation model for the analysis of the effect of the multipath fading on the near-far problem in CDMA mobile radio systems," *IEICE Trans. Comm.*, vol. E76-B, 2, pp. 103-112, 1993.
- [19] 関根松夫, *レーダ信号処理技術*, 電子情報通信学会, 1991.
- [20] K. I. Perersen, P. E. Mogensen, and B. H. Fleury, "A stochastic model of the temporal and azimuthal dispersion seen at the base station in outdoor propagation environment," *IEEE Trans. Vehicul. Technol.*, vol. 49, no. 2, pp. 437-447, 2000.
- [21] E.W. Stacy, "A generalization of the gamma distribution," *Annal. Math. Stat.*, vol. 33, pp. 1187-1192, (1962).
- [22] H. Suzuki, "A statistical model for urban radio propagation; Multipath characteristics in New York City," *IEEE Trans. Comm.*, COM-25, pp. 673-680, 1977.
- [23] 進士昌明 (編), *無線通信の電波伝搬*, 信学会, 1992.
- [24] E. Jakeman and P. N. Pusey, "A model for Non-Rayleigh sea echo," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-24, no. 6, pp. 806-814, 1976.
- [25] 石川義裕、関根松夫、武者利光, "K 分布に従うシークラッタの X バンドレーダによる観測," *信学論(B-II)*, vol. J76-B-II, no. 7, pp. 625-633, 1993.
- [26] A. Abdi and M. Kaveh, "K distribution: an approximate substitute for Rayleigh-lognormal distribution in fading-shadowing wireless channels," *Electronics Lett.*, vol. 34, no.9, pp. 851-852, 1998.
- [27] J. Salo, H. M. El-Sallabi, and P. Vanikainen, "The distribution of the product of independent Rayleigh random variables," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 2, pp. 639-643, 2006.
- [28] S. Al-Ahmadi, "The gamma-gamma signal fading model: A survey," *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 56, no. 5, pp. 245-260, 2014.
- [29] Y. Karasawa, K. Kimura and K. Minamisono, "Analysis of availability improvement in LMSS by means of satellite diversity based on the three-state propagation channel model," *IEEE Trans. Vehicl. Tech.*, vol. 46, 4, pp. 1047-1056, 1997.
- [30] A. T. James, "Distribution of matrix variables and latent roots derived from normal samples," *Ann. Math. Statist.*, vol. 35, pp. 475-501, 1964.
- [31] A. Edelman, "Eigenvalues and condition numbers of random matrices," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 9, no. 4, pp. 543-560, 1988.
- [32] C. G. Khatri, "Distribution of the largest or the smallest characteristic root under null hypothesis concerning complex multivariate normal populations," *Ann. Math. Statist.*, vol. 35, pp. 1807-1810, Dec. 1964.
- [33] E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *European Trans. Telecommun.*, vol. 10, no. 6, pp. 585-595, Nov. 1999.
- [34] T. Taniguchi, S. Sha, and Y. Karasawa, "Analysis and approximation of statistical distribution of eigenvalues in i.i.d. MIMO channels under Rayleigh fading," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E91-A, no. 10, pp.2808-2817, 2008.
- [35] M. L. Mehta, *Random Matrices (Third Ed.)*, Elsevier Academic Press, 2004.
- [36] A. M. Tulino and S. Verdú, *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, now Publishers Inc., 2004.
- [37] 唐沢好男, "Massive MIMO チャネルの漸近固有値分布と通信路容量," *信学論(B)*, vol. J99-B, no. 9, pp. 637-645, 2016.09.