

ランダムウォークと電波伝搬 【改訂版】

唐沢 好男

本レポートでは、ランダムウォークしながら、電波伝搬に現われる基本的な式やモデルを訪ねる。電波伝搬、特に移動通信のマルチパス伝搬は、もともと不規則過程に生まれる現象であるのでランダムウォークそのものであるといっても良い。ここでは、1次元空間・2次元空間のランダムウォークから始まり多次元空間に至る。ランダムウォークは空間の次元数が上がれば上がるほど、出発点付近に戻ってくる確率は小さくなる。この特徴はフェージング対策であるスペースダイバーシチに活かされている。どういう意味かと興味を持った人、是非このレポートを読んで欲しい。【本稿は YK-036 の改訂版：原版に対して記述と図面の追加、および一部記述の削除を行ったが、本質的な変更はない】

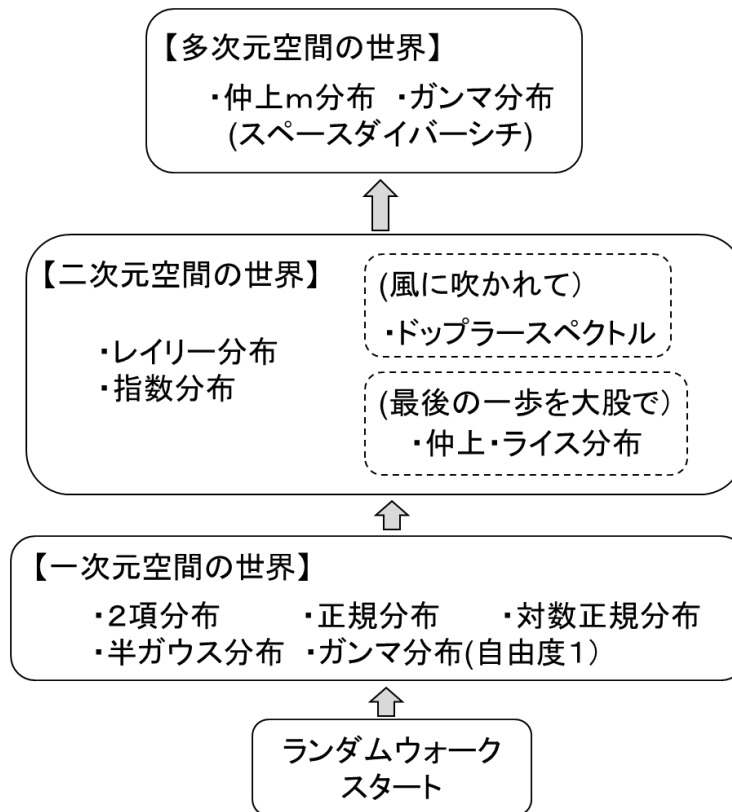


図1 ランダムウォークで巡る伝搬モデル

1. ランダムウォークと伝搬モデル

ランダムウォークする過程で出会う伝搬モデルを取り上げる。ランダムウォークとは、一歩踏み出した次の一歩の大きさや方向等がランダム（有相関を含む）である現象を言う。

ランダムウォークは、種々の物理現象（自然現象）や経済変動などの基本モデルに生きていて、その理論基盤は数理統計学で裏打ちされている[1]。巷では、酔っ払いの千鳥足にも例えられる。我々分野の電波伝搬、特に、移動通信分野に現われるマルチパス伝搬現象も、加法性や乗法性のある定常不規則過程の現象であり、ランダムウォークと密接に関連している。本資料では、1次元空間・2次元空間から多次元空間に至るランダムウォークを通して、それぞれの場所に出会う伝搬モデル（非常に基本的なモデル）を眺めてみたい。

ここでは、ランダムウォークして最も初歩的な仮定、すなわち、

- 1) 一歩毎のステップ幅は一定とする（この長さを1とする）
- 2) 次のステップの方向はその次元において、完全にランダムとする

図1は、ランダムウォークによって見えてくる伝搬モデルをまとめている。着目する物理量は多岐に亘るが、ランダムウォークと言う点において共通である。例えば、無線通信のフェージング対策としてスペースダイバーシチがあるが、これは、2次元空間のランダムウォークを多次元空間のランダムウォークに移し替えて、二度と原点に戻れなくしてしまうというランダムウォークの特徴を活かしたものになっている。

尚、ここでは、ランダムウォークから伝搬モデルへの道筋についてのみ述べ、お馴染みの式が現われたところで止めている。たどり着いた先のモデルの電波伝搬的視点からの式の導出や物理的意味については[2]を見て欲しい。

2. 一次元空間をさまよう

2. 1 行きつ戻りつ

出発点の位置を原点に取り、 N 歩進んだ点 P の原点からの距離を調べる。歩く範囲が直線上 (x 軸上) にあるとき、1次元ランダムウォークと呼ぶ。行きつ戻りつのイメージである。このとき、 P 点の位置 $x_1^{(N)}$ は以下で表される。

$$x_1^{(N)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad (\alpha_i = 1 \text{ or } -1) \quad (1)$$

一次元の場合、居場所は離散的になり、 N に対して、 N が偶数のとき、

$$x_1 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm N$$

N が奇数のとき、

$$x_1 = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm N$$

である（要は、 N が偶数のときは x_1 も偶数、奇数のときは奇数である）。この地点にいる確

率 p_{x_1} は、原点を中心とする 2 項分布 $B(N, 1/2)$ になり、次式で与えられる。

$$p_{x_1}(x_1, N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+x_1}{2}\right)! \left(\frac{N-x_1}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (2)$$

図 2 はこれを説明している。

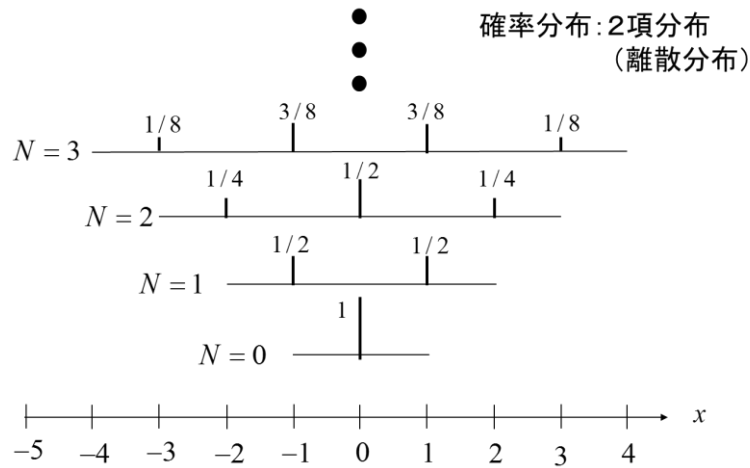


図 2 1次元空間のランダムウォーク

中心極限定理より、 N が十分大きいときには、平均値 0 、標準偏差 \sqrt{N} の正規分布（ガウス分布）で近似できる。 $r_1 \equiv |x_1|$ と置くと、 r_1 の確率密度関数 p_{r_1} は次式で与えられる半ガウス分布になる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{r_1}(r_1; N) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}\right) \quad (r_1 \geq 0; \sigma^2 = N) \quad (3)$$

ここで、 $R_1 \equiv r_1^2$ とすると、 R_1 の確率分布 P_{R_1} は以下になる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_1}(R_1; N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 R_1}} \exp\left(-\frac{R_1}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

この分布は自由度 1 のガンマ分布である。（ガンマ分布の一般式は 4 節の(25b)式で与えられるが、そのパラメータ: ν, β に対しては $\nu=0.5, \beta=1/(2N)$ である）

直線上を行ったり来たりに対応する物理現象は少ない。お馴染みの伝搬モデルに出会うのはまだこれからである。

2. 2 水をこぼしながら

この話題は1次元空間に限らないが、1次元ランダムウォークで説明できるので、ここで取り上げる。対数正規分布との出会いである。

出発点では水がいっぱい入ったバケツを持っている。このとき、新たな仮定として以下を加える。

「一歩進む毎に残っている水が一定の比率に従ってこぼれ、歩く毎にだんだん水が減ってゆく。その比率 γ_i (i 歩目と $i-1$ 歩目の水量の比 (>1) には多少のばらつきがある。)

このとき、 N 歩後に残っている水の量 w は

$$w = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_N = \prod_{i=1}^N \gamma_i \quad (5)$$

であり、その対数をとると

$$\ln w = \sum_{i=1}^N \ln \gamma_i \quad (6)$$

となる。中心極限定理より、 $\ln w$ は N が十分大きいところでは正規分布になるため、水の残量 w の確率分布 f_{LN} は次式で与えられる**対数正規分布**となる。

$$f(w; N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma w} \exp\left\{-\frac{(\ln w - m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (7)$$

ここで、 m, σ は分布のパラメータで、 m は $\ln w$ の平均値、 σ は標準偏差である。

式(5)より明らかなように、対数正規分布は、結果が乗算の積み重ねで引き起こされる確率過程の現象に見られる。電波伝搬では、移動通信のマルチパス伝搬モデルを構成する遮へい成分による減衰（短区間中央値変動）の分布として現われる。

3. 二次元空間をさまよう

3. 1 千鳥足

直交軸 x, y の2次元平面でのランダムウォーク(2次元ランダムウォーク)を行う(図3)。2次元ランダムウォークによる出発点から到達点までの距離 r_2 において、一歩一歩進める毎に変わってゆく確率分布を考える。

1次元ランダムウォークにおける2項分布(ただし、絶対値を扱うので半2項分布)に相当するものである。

一歩目($N=1$)の中心からの距離は常に1であるので、このときの r_2 の確率密度関数は

$$p_{r_2}(r_2; 1) = \delta(r_2 - 1) \quad (8)$$

である。ここで、 δ はデルタ関数である。二歩目($N=2$)では、原点から距離1離れたところにある半径1の円までの距離 $r_2^{(2)}$ であり、一歩目の位置を中心とする角度 ϕ (2歩目が原点から離れる方向を $\phi=0, 0\sim 2\pi$ の範囲で一様分布する)に対して、以下で表される。

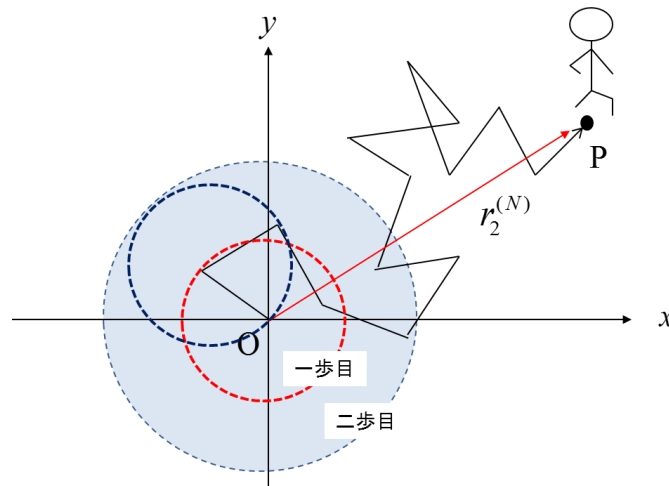


図3 2次元空間のランダムウォーク

$$r_2^{(2)} = \sqrt{2(1 + \cos \phi)} \quad (\leq 2) \tag{9}$$

この確率密度関数は

$$p_2(r_2; 2) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - r_2^2/4}} \tag{10}$$

となる。三步目、四歩目と歩数を増やし、 N の関数として確率分布を順次求めたいが、上記のような手計算では、もはや無理である。

ここで少し確率分布のおさらいをしたい。それぞれに分布を持つ確率変数 X と Y があるとき、 $U=X+Y$ での U の分布を求めたい場合には X と Y のそれぞれの確率密度関数の畳み込み積分になる。 $X+Y+Z+\dots$ と変数が増えて行くと、畳み込み積分の多重度が上がり計算が複雑になる。このようなときの便利な方法が特性関数に変換しての計算である。フーリエ変換がその一つのイメージであるが、特性関数に変換すると確率変数の足し算は特性関数の積の演算を使って求めることができる。そのようにして得られた特性関数の逆変換をすれば求めたい確率密度関数になる。特性関数にはいろいろのタイプがあるが、ランダムウォークでの到達距離 $r_2^{(N)}$ の確率分布を求めるにはハンケル変換形の特性関数（フーリエ・ベッセル変換とも呼ばれる）が適しており、以下の変換対で表される[3]。

$$p(r) = r \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) F(\lambda) d\lambda \tag{11a}$$

$$F(\lambda) = \int_0^\infty J_0(\lambda r) p(r) dr \tag{11b}$$

振幅一定で位相が一様分布する正弦信号の和の信号の包絡線の確率分布を求めるのに適

しており、通信分野での応用では、周波数の異なる多数の正弦波が合成されたときの包絡線変動の確率分布を求めたいときなどである。(8)式のデルタ関数で表される確率分布を(11b)式に入れると、ハンケル変換形特性関数(以下単に特性関数と呼ぶ)は $J_0(\lambda)$ になる(J_0 は第一種0次ベッセル関数)。振幅が a_1 と a_2 の和の特性関数は $J_0(a_1\lambda)J_0(a_2\lambda)$ となる。さらに一般に、大きさ a_i の N 個の和の特性関数は

$$F(\lambda) = \prod_{i=1}^N J_0(a_i \lambda) \quad (12)$$

となる[3]。ここでは、ステップ幅を1としているので、 N 歩目までの距離の確率分布の特性関数は以下である。

$$F(\lambda) = \{J_0(\lambda)\}^N \quad (13)$$

N が十分大きい場合には、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{J_0(\lambda)\}^N = \exp\left(-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right) \quad (\sigma = \sqrt{N/2}) \quad (14)$$

となる。

これを(11a)式に代入して確率密度関数を求めると次の式になる。

$$\begin{aligned} p_{r_2}(r) &= r \int_0^{\infty} \lambda J_0(r\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式はレイリー分布である。ここで、 $R_2 \equiv r^2$ とすると、 R_2 の確率分布 P_{R_2} は以下の**指数分布**になる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_2}(R_2; N) = \lambda \exp(-\lambda R_2) \quad (R_2 \equiv r^2, \lambda = 1/\langle R_2 \rangle = 1/N) \quad (16)$$

2次元空間のランダムウォークによって出会ったレイリー分布は移動伝搬の代表的フェージング環境であるレイリーフェージングの信号強度の確率分布、また、その電力変動(あるいはSN比変動)が指数分布である。

ここでは一步の歩みから積み重ねていったので、簡単なレイリー分布を得るのに複雑な手順を経た。この道筋を通ったのは、次節の下準備を兼ねていたからで、(15)式を得たいだけであるならば、以下の手順でよい。

出発点からの距離 r_2 は次式である。

$$r_2^{(N)} = \sqrt{\left| \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^N \Delta y_i \right|^2} \quad \left(\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 1 \right) \quad (17)$$

N が十分大きいとき、 $\sum \Delta x_i$ と $\sum \Delta y_i$ は、中心極限定理により、それぞれ独立な正規分布であるので、 r_2 の確率分布 p_{r_2} は(11)式のレイリー分布になる[2]。

3. 2 最後の一步を大股で

前節で述べた千鳥足での歩みの最後の一步を大股で締めることを考える(図4)。これは、仲上・ライス分布に出会うためのランダムウォークである。

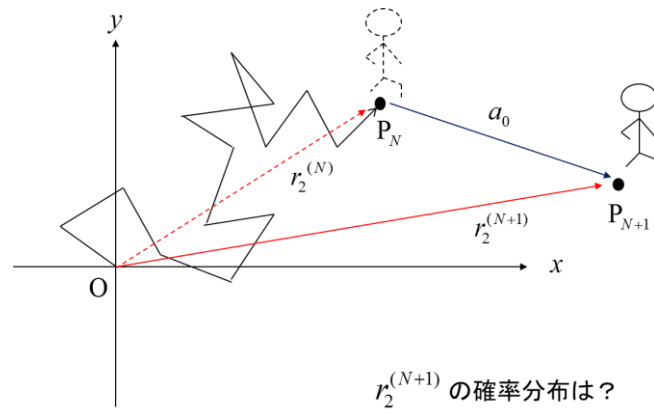


図4 最後の一步を大股で

文献[4]でも解説したように、今日、仲上・ライス分布（あるいはライス分布）と呼ばれている確率分布は、我が国の当時においては仲上 n 分布と呼ばれた。1940年代、仲上稔博士は、短波の電離層伝搬の研究において、 m 分布[5]、 n 分布[6]、 q 分布[7]という三つの確率分布を編み出している。これらは、移動通信のマルチパス伝搬を支える基本分布として今も生き続けている。ここでは、そのうちの仲上 n 分布を訪ねてみたい。仲上博士と米国ベル研の S.O, Rice [8]は別の目的・別の方法で同じ式で表される確率分布を導いたが、ここでは、仲上流で迫るため、仲上 n 分布と呼ぶ。尚、仲上の3つの確率分布に関する詳しい解説は[3] (の9章) や[2] (の3章) で行われている。

話を(13)式の続きから始める。

最後の一步 ($N+1$ 歩目) を、大きな幅 a_0 で踏み出したとする（後から分かるように、本当は大きくても小さくても関係ない）。このときの特性関数は

$$F(\lambda) = \{J_0(\lambda)\}^N J_0(a_0 \lambda) \quad (N+1 \text{ 歩目}) \quad (18)$$

である。 N が十分大きい場合には、長くランダムウォークした後の最後の一步後の距離の確

率分布の特性関数は、(14)式にこの一步を付け加えることにより、

$$F(\lambda) = J_0(a_0\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right) \quad (19)$$

となる。これを(11a)式に代入して確率密度関数を求めると次の式になる。

$$\begin{aligned} p_{Nn}(r) &= r \int_0^\infty \lambda J_0(r\lambda) J_0(a_0\lambda) \exp\left(-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right) d\lambda \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a_0^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{a_0 r}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

この分布が仲上 n 分布、すなわち、今日の**仲上・ライス分布**（あるいはライス分布）である。最後の一步を際立たせるために大きな一步としたが、式からわかるように「大きい」という制限はどこにも無い。 $a_0=0$ とすれば、(15)式のレイリー分布に一致する。

仲上・ライス分布に対する一つのイメージが湧いたと思うが、分布の導出をこの方法で行うことは複雑さゆえにお勧めしない（仲上博士はこの方法を使った）。お勧めする方法は[2]の(6.3)式の方法（あるいは[4]の(2)式）で、こちらはライス（S.O. Rice）流である。

3. 3 風が吹く中で

2次元空間に一方から一定速度 v_0 の強い風（ランダムウォークの速度に比べて十分速いという意味）が吹いている。歩行者は、その風の強さを歩行者が向く方向（視線方向の成分）に対してのみ感じるとする。追い風をプラスにとると、向かい風はマイナス、横風成分は0である。一步毎に感じる風の強さ（視線方向の風の強さ）は

$$v_i = v_0 \cos \phi_i \rightarrow v_i / v_0 = \cos \phi_i$$

ここで、 ϕ_i は i 歩目に進む方向で、これが2次元空間でランダムである。歩行者の速度を無視しているから等号でなく近似とすべきであるが、厳密なことは言わない。

100,000 歩に対して、一步毎に感じた正規化風速（ v_0 で正規化した風速）の発生回数（ヒストグラム）を図5に示す。視線方向風速 v の発生回数密度（微小指定幅 Δv に入る風速の発生回数） ρ の理論式（同図の実線）は以下で与えられる。

$$\rho(v) = \frac{N}{\pi v_0 \sqrt{1 - (v/v_0)^2}} \quad (21)$$

どこかで見たことのある式になっている。そう、水平面内の角度一様に到来波が飛来するマルチパス環境におけるドップラースペクトル ([2]の(5.53)式) であり、 $\rho \rightarrow S$ (受信電力密

度) , $v \rightarrow f$ (ドップラー周波数) , $v_0 \rightarrow f_D$ (最大ドップラー周波数) , $N \rightarrow P_R$ (受信電力) とすると、

$$S(f) = \frac{P_R}{\pi f_D \sqrt{1 - (f / f_D)^2}} \tag{22}$$

で表される (対応付けの意味は各自考えて欲しい)。

上式で、 $f = \pm f_D$ で値が無限大になる意味は何であろう。図6による思考実験はどうだろう。鬼の面の団扇がある (裏面は白色)。これをゆるい速度で回転すると絵が混じりあって分からなくなってしまうが、さらに回転速度を速めてゆくとどうなるであろう。元の絵が浮かび上がってくるのではないだろうか。なぜなら、その状態の発生回数が無限に多い ($v = v_0$ 、あるいは $f = f_D$ に対応して) のだから。興味を持った人、実際に試してみて。

もう一つ考えて欲しいことがある。式(10)と式(21)も形が同じである。扱っている物理量もアプローチの仕方もまったく違ったものであるのに、同じ形になっているということは、根本に同じ物理が隠れているわけである。さてそれは何であろうか？

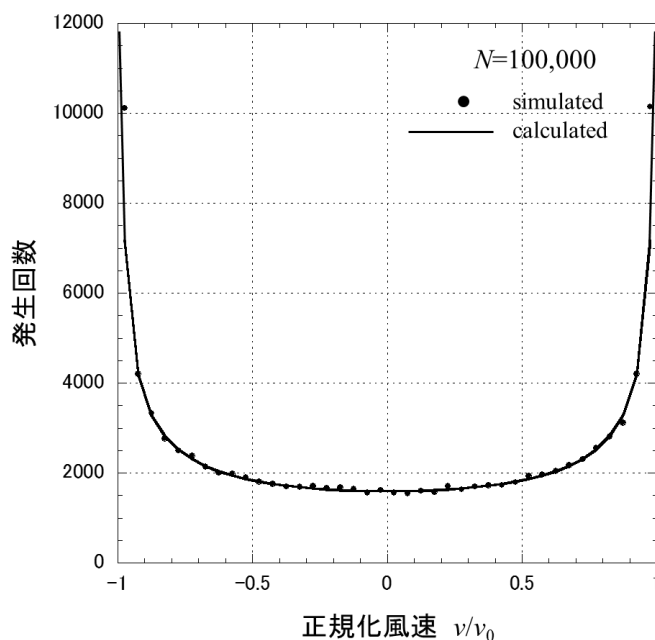


図5 ランダムウォーク中の風速 (視線方向の正規化成分) の分布
 (計算値の±1の時の値は無限大、シミュレーション値は0.05の幅に入った回数)

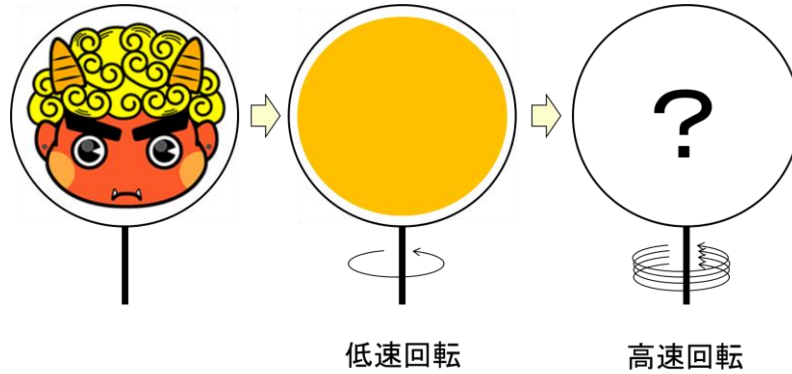


図6 団扇の高速回転で出てくるものは？（裏面は白紙、あるいは、表と裏を重ねると、全体として一つの絵になるものでも良い）

4. 多次元空間をさまよう

ランダムウォークを多次元空間 (M 次元) に拡張してみよう。3次元空間でのランダムウォークは、重力が無い環境を思い浮かべればよいであろう（無重力では足の置き場がなく歩けないと言う心配は脇に置き）（図7）。3次元の世界で生きている我々には、4次元以上の空間をイメージしにくい、直交する x_1, x_2, \dots, x_M 軸で構成される空間で、この中をランダムウォークしていると思って欲しい。中心からの距離を r_M 、その二乗値を R_M とする。 r_M は、

$$r_M^{(N)} = \sqrt{\sum_{k=1}^M \left| \sum_{i=1}^N \Delta x_i^{(k)} \right|^2} \quad \left(\sqrt{\sum_{k=1}^M (\Delta x_i^{(k)})^2} = 1 \right) \quad (23)$$

である。このとき、 N が十分大きいときの極限における r_M と R_M の確率密度関数 p_{rM}, p_{RM} はそれぞれ次式である。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{r_M}(r_M; N) = \frac{2(M/2)^{M/2}}{N^{M/2} \Gamma(M/2)} r_M^{M-1} \exp\left(-\frac{M}{2N} r_M^2\right) \quad (24a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{R_M}(R_M; N) = \frac{1}{\Gamma(M/2)} \left(\frac{M}{2N}\right)^{M/2} R_M^{M/2-1} \exp\left(-\frac{M}{2N} R_M\right) \quad (24b)$$

ここで、 Γ はガンマ関数である。(24a)式については、左辺 $\rightarrow p_{Nm}, r_M \rightarrow r, M \rightarrow 2m, N \rightarrow \Omega$ に、また、(24b)式については、左辺 $\rightarrow p_G, R_M \rightarrow R, M \rightarrow 2\nu, N \rightarrow \nu/\beta$ に置き換えると、両式はそれぞれ次式になる。

$$p_{Nm}(r; m, \Omega) = \frac{2m^m}{\Omega^m \Gamma(m)} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} r^2\right) \quad (25a)$$

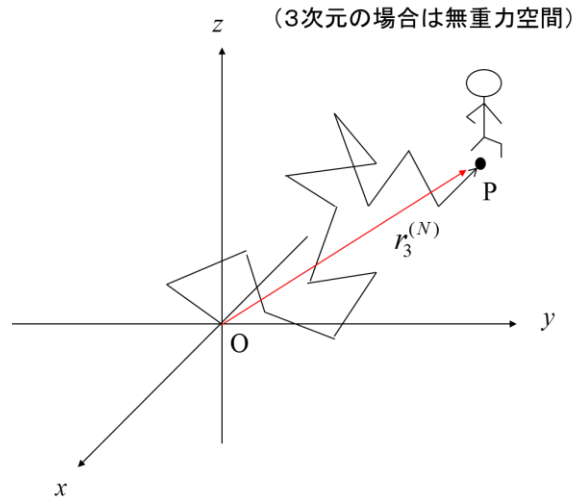


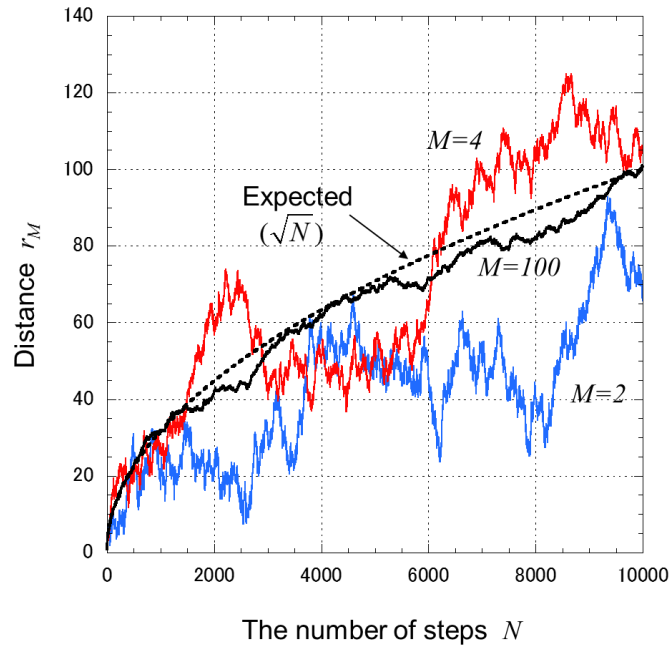
図7 3次元空間のランダムウォーク（多次元空間では直交軸が多数になるが、図を描くのは難しい）

$$p_G(R; \nu, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu R^{\nu-1} \exp(-\beta R) \quad (25b)$$

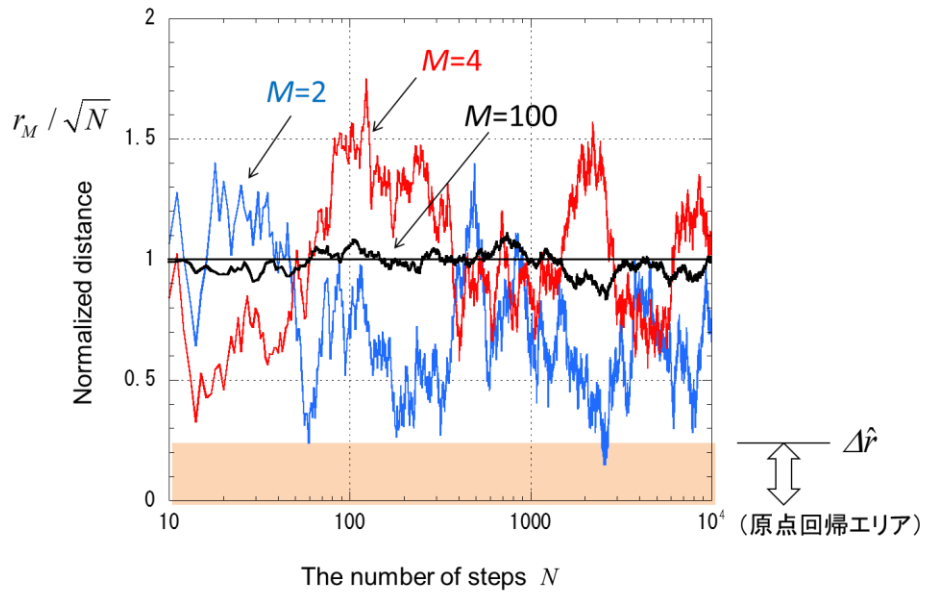
p_{Nm} は仲上 m 分布、 p_G はガンマ分布であり、多次元空間のランダムウォークによって両分布に出会えたことになる。

ここで、ランダムウォークの末、また、原点（出発点）近くに戻ってくる確率を考えてみたい。図8は $M=2, 4, 100$ のランダムウォークの一例で、10,000歩までを示している。同図(a)は一步毎に変わってゆく距離の変化を描いている。一步進む毎に平均的には原点から遠ざかって行き、いずれの次元においても、 \sqrt{N} （二乗値 R の期待値 (N) の平方根；図の点線）を中心にはばらつくことになる。実際には、 $M=2$ や 4 では、変化もダイナミックであるが、 $M=100$ のような非常に高い次元になると、ばらつきが小さくなって期待値の曲線に近づいてくることが分かる。歩数 N の軸を対数にし、正規化した距離 $\hat{r}_M \equiv r_M^{(N)} / \sqrt{N}$ について描き直したものが同図(b)である。

前述のとおり、 N が十分大きいとき、正規化距離 \hat{r}_M の確率分布は、 $m=M/2, \Omega=1$ の仲上 m 分布である。1 より十分小さい正規化距離での適当なしきい値 $\Delta \hat{r}$ に対して、正規化距離が $\Delta \hat{r}$ 以下になったとき、出発点に戻ってきた（原点回帰した）とする。図8(b)には、その一例として $\Delta \hat{r}$ のイメージを示している。図9は $M=1, 2, 4, 8, 16$ の仲上 m 分布の確率密度関数を描いている。図より、ランダムウォークにおいては、次数 M が大きくなるほど、正規化距離は1の付近に集中するようになり、原点回帰の確率がどんどん小さくなることを示している。多次元世界に迷い込んだら二度と元には戻れないと言う恐ろしい話であるが、一方で、無線通信にはこの特徴を活かしたフェージング対策がある。以下で説明するスペースダイバーシティである。



(a) 歩数と距離の関係



(b) 正規化距離と原点回帰エリア

図8 $M=2, 4, 100$ でのランダムウォーク到達距離の一試行例

移動通信のフェージング環境下で受信する受信強度は $M=2$ に相当するレイリー分布になる。強度 0 を原点とすると、原点近くへの回帰が頻繁である。受信強度が落ちると雑音に負けるのでこれを防ぐ必要がある。受信側に複数のアンテナを並べると、その間隔が十分広ければ、それぞれの受信強度は独立の変動になる。 K 個のアンテナの場合は、信号は $M=2K$ 次元空間で変動していると解釈される。(無線通信ではフェージングの振幅・位相変動を複素

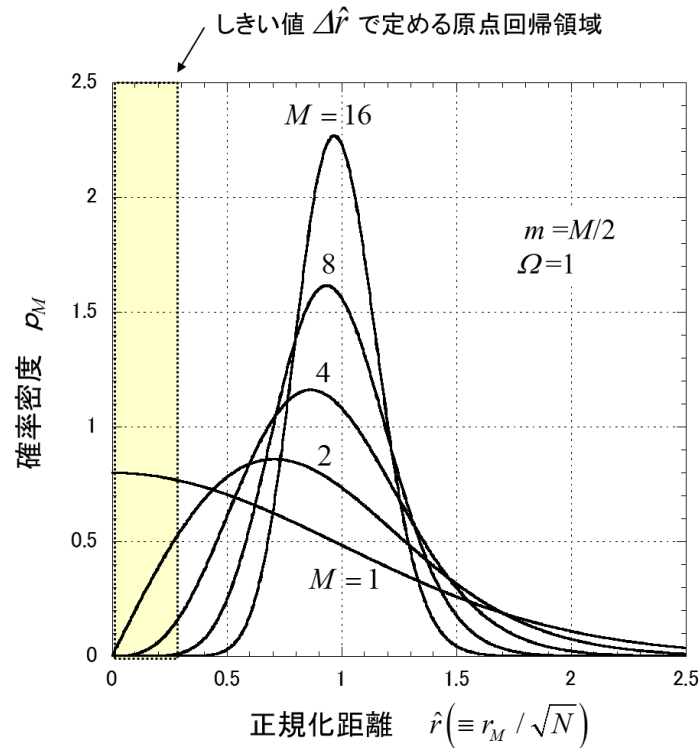


図9 仲上m分布で見る正規化距離と空間次元の関係
 (次元が高いほど原点に回帰する確率が小さくなる；M=2はレイリー分布)

数の2次元で表すため2倍になる)。アレーアンテナのウェイトを調整して、受信信号のSN比が最大になる受信方式は**最大比合成ダイバーシチ**と呼ばれる。アンテナ素子数を K とすると、ダイバーシチ合成後の信号の強さ（包絡線、あるいは実効値）は $m=K$ （すなわち $M=2K$ ）の仲上m分布になる（電力変動やSN比の変動では $\nu=m$ のガンマ分布になる）[2]。アンテナ素子数が多いほど高いダイバーシチ効果を得るが、これは、2次元空間のランダムウォークを $2K$ 次元の高次元空間ランダムウォークに移し変えることにより、原点に回帰する確率（すなわち、信号強度の低下する確率）を少なくするという多次元ランダムウォークの特徴を活かしていると解釈できる。（なお、スペースダイバーシチには、上述の変動を抑える働きと共に、アンテナ数に比例して平均受信電力を上げる機能もあり、優れたフェージング対策である。）図10はこれを説明している。多次元空間において、中心からの距離が一定の面は**超球面**と呼ばれるが、アンテナ数 K が増えるに従い、受信信号は超球面の付近を動き回ると言うイメージである。

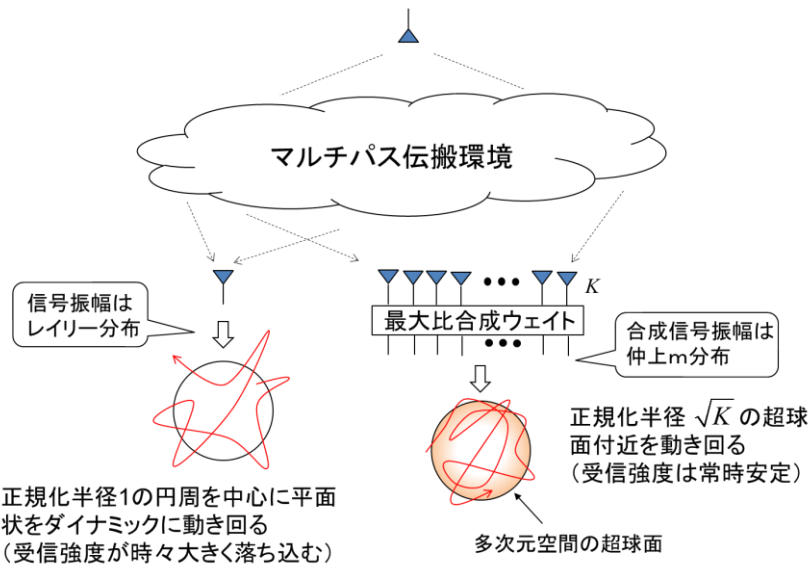


図 1 0 スペースダイバーシチを多次元ランダムウォークの視点で見る

5. 雑感

以下はランダムウォーカーの人生論。ここで議論してきた空間次元は「自由の広さ」と読み替えることもできる。与えられた自由が少ないと、その範囲の中でダイナミックに動き回ることができる。自由が与えられすぎると、本人はそれを謳歌しているつもりでも、周りから見れば、超球面の表面付近をうろうろしているだけになり、結果的にはお釈迦様の手のひらの上から抜けられないということになる。人生、どちらが幸せだろうか。

参考文献

[1] B. Hughes, Random Walks and Random Environments, Vol.1, Random Walks, Oxford, U.K.: Oxford Univ. Press, 1995.

[2] 唐沢好男, 改訂: デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.

[3] 奥井重彦, 電子通信工学のための特殊関数とその応用, 森北出版, pp. 154-157, 1997.

[4] 唐沢好男, "電波伝搬: 物理現象とモデリング -先達の足跡をたどる-", 信学誌, vol. 99, no. 8, pp. 792-798, 2016.

[5] 仲上稔, "短波によるフェージングの統計的特性," 電気通信学会誌, No. 239, 1943.02.

[6] 仲上稔, "位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究 (その2)," 電気通信学会誌, no. 202, 1940.01.

[7] 仲上稔, 佐々木哲夫, "位相が任意の範囲に於て不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する理論的考察," 電気通信学会誌, No. 228, pp. 205-213, 1942.

[8] S. O. Rice, "Mathematical analysis of random noise," Bell System Tech. Jour. (BSTJ), vol. 23, no. 3, 1944, and vol. 24, no. 1, pp. 46-156, 1945.