Technical Report YK-042
Feb. 28, 2020
Y. Karasawa

仲上・ライス分布の数値計算に関する留意点

～変形ベッセル関数 I_0 を含む計算における～

唐沢好男

１．留意点

見通し内フェージング環境を表す代表的なモデルとして仲上・ライスフェージングモデルがある[1]。仲上・ライスフェージング環境での信号強度（包絡線）r の確率分布は仲上・ライス分布と呼ばれ、次式で与えられる。

$$f_{NR}(r;a,\sigma)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{a^2+r^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \tag{1}$$

ここで、I_0 は 0 次の第一種変形ベッセル関数、a は定常波（＝直接波）成分の振幅、σ は不規則波（＝散乱波）成分の強さを表すパラメータであり、定常波成分の電力 P_D と不規則波成分の平均電力 P_S の比 K は次式で定義される。

$$K\equiv\frac{P_D}{P_S}=\frac{a^2}{2\sigma^2} \tag{2}$$

この K はライスファクタ（あるいは K ファクタ）と呼ばれ、仲上・ライス分布の形を決めるパラメータになる。

(1)式を K と a を用いて表すと次式である。

$$f_{NR}(r;a,K)=\frac{2Kr}{a^2}\exp\left(-K\left\{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\right)I_0\left(2K\frac{r}{a}\right) \tag{3}$$

$z=r^2$ と置いた電力次元の確率分布は次式となる

$$f_z(z;a,K)=\frac{K}{a^2}\exp\left\{-K\left(1+\frac{z}{a^2}\right)\right\}I_0\left(2K\frac{\sqrt{z}}{a}\right)\qquad\left(z=r^2\right) \tag{4}$$

さて、この分布、f_{NR} や f_z を計算機で数値計算しようとすると、K が大きいとき正しい答えを出してくれない場合がある。故に計算に対しては常に注意は必要である。

次節では、この問題についての解決法を述べる。

２．問題の発生と解決法

変形ベッセル関数 I_0 の性質をまとめる。$I_0(x)$と置くと、$I_0(0)=1$ で、この後 x の増加と共に値が指数関数的に増加して行く。x=10 で 2,815.7、x=100 で 1.07839×10^{42}（← とてつもなく大きい）である。変形ベッセル関数 I_0 には x が大きいときに適用できる次の近似式がある[2]。

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad (x \to \infty) \tag{5}$$

この式の形を見れば、上記の意味が読み取れると思う。図 1 は、I_0 と近似式での計算値を比較して示している。図より、$x \geq 10$ では近似式の適用でまったく問題ないことが分かる（x=10 で誤差 1.3%、x=20 で 0.6%、x=30 で 0.25%）。

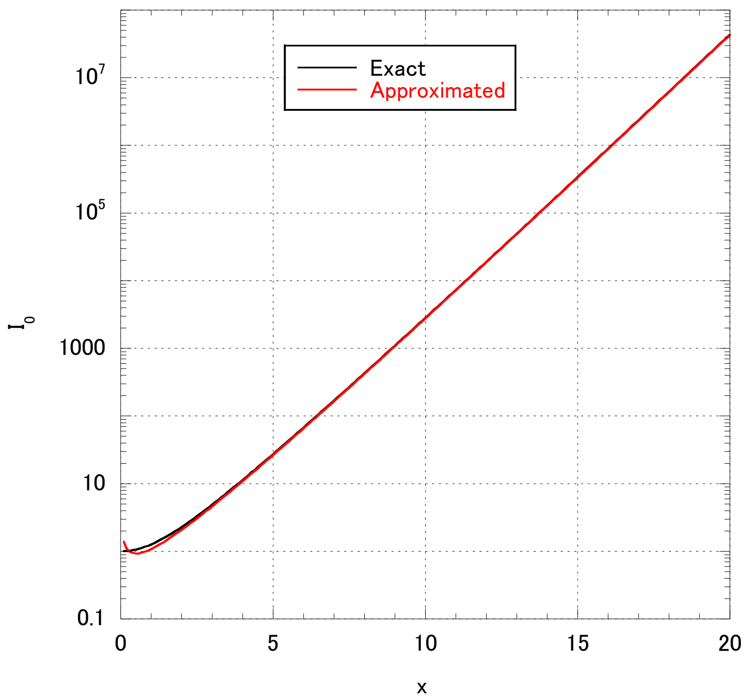


図 1　変形ベッセル関数 I_0 の値と近似式の値の比較

変数 x の値が大きいところでこの近似式を使えば問題が解決されるかというとそうではない。なぜなら、値が指数関数的に増加することに変わりはないからである。

電波伝搬に出てくる I_0 を含む数式は、仲上・ライス分布に見られるように、その大部分において以下の形になっている。

$$h(x) \propto \exp\{u(x)\} I_0(\alpha x) \tag{6}$$

式中の関数 exp $\{u(x)\}$の部分は x の増加と共に 0 に近づく形である。この二つの関数（exp $\{u(x)\}$と $I_0(\alpha x)$）の積はお互いの極端な傾向を打ち消しあって、一定範囲の値を示す場合が

多い。そこで、I_0 を近似式に置き換え

$$\exp\{u(x)\}I_0(\alpha x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha x}}\exp\{u(x)+\alpha x\} \tag{7}$$

と式を書き換えることによって留意点で延べた問題が解決できる。

３．仲上・ライス分布への応用

２節で述べた解決法を仲上・ライス分布に適用してみよう。(3)式の I_0 を近似式(5)で置き換えて整理すると次式になる。

$$\begin{aligned} f_{NR}(r;a,K) &= \frac{2Kr}{a^2}\exp\left[-K\left\{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}\right]I_0\left(2K\frac{r}{a}\right) \\ &\approx \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Kr}{\pi a}}\exp\left\{-K\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\right\} \qquad (K \geq 10) \end{aligned} \tag{8}$$

上式で K の値が十分に大きいときには、f_{NR} は r が a に近い付近でのみ、有意な値を持ち、それ以外は 0 に限りなく近くなるため、上式はさらに近似できて、

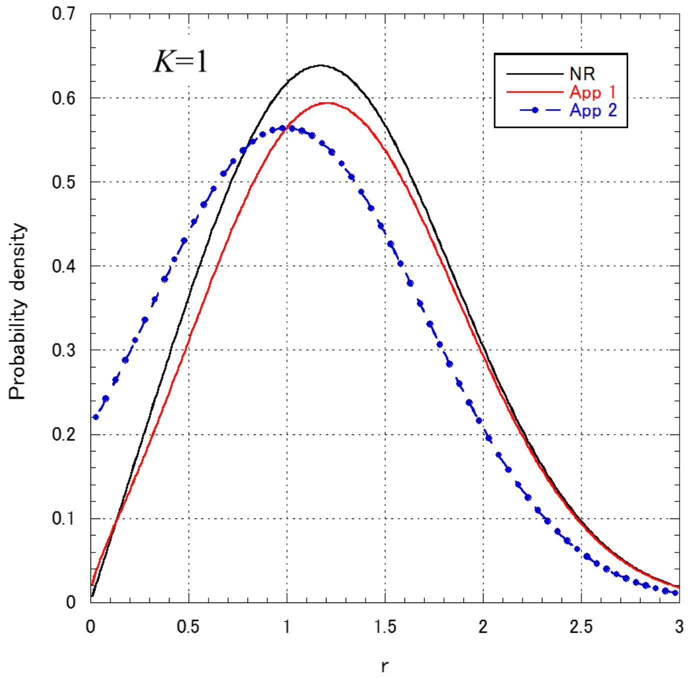
$$\begin{aligned} f_{NR}(r;a,K) &\approx \frac{1}{a}\sqrt{\frac{K}{\pi}}\exp\left\{-K\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad \left(\because K=\frac{a^2}{2\sigma^2};\ K\rightarrow\infty\right) \end{aligned} \tag{9}$$

と、a を中心とする正規分布に至ることが分かる。

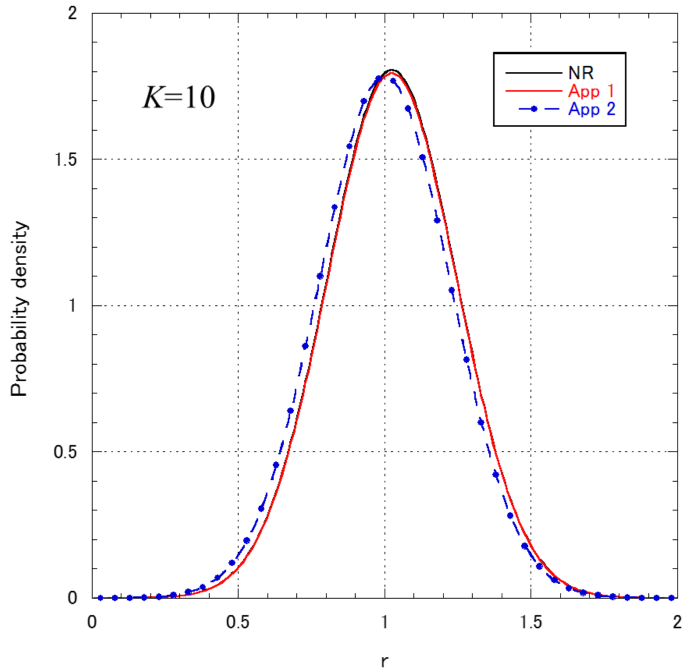
図２は a=1 で、K=1 (0dB), 10 (10dB), 100 (20dB), 1000 (30dB)としたときの元の式（(3)式：NR)、(8)の近似式（app1)、(9)の正規分布近似(app2)を比較して示している。図より、近似式（式(8)）は $K \geq 10$ で十分な精度になっていることが分かる。K=1000 では、仲上・ライスの式（(3)式）の全ての出力が 0 となって、正しい計算ができていない（計算は Matlab による)。

(4)式で表される電力の確率分布も $K \geq 10$ では以下の近似式が適用できる。

$$f_z(z;a,K) \approx \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{K}{\pi a\sqrt{z}}}\exp\left\{-K\left(\frac{\sqrt{z}}{a}-1\right)^2\right\} \qquad (K \geq 10) \tag{10}$$

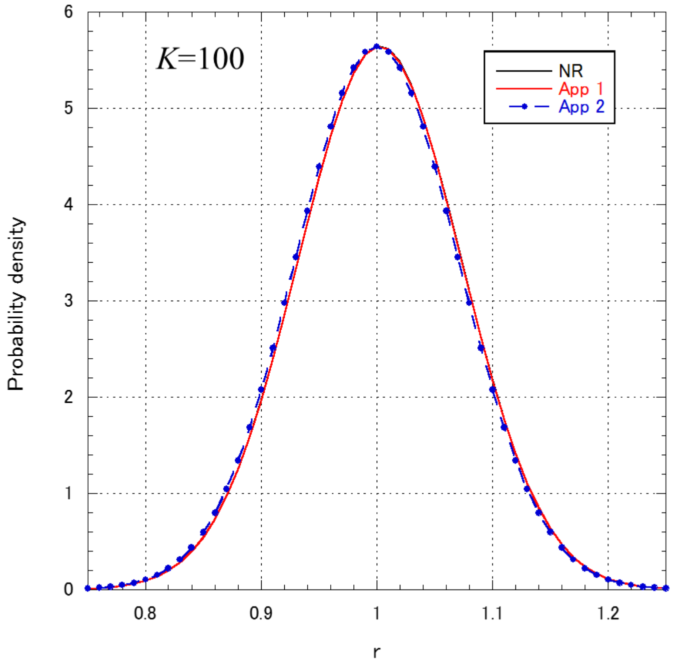


(a) *K*=1 (0 dB)

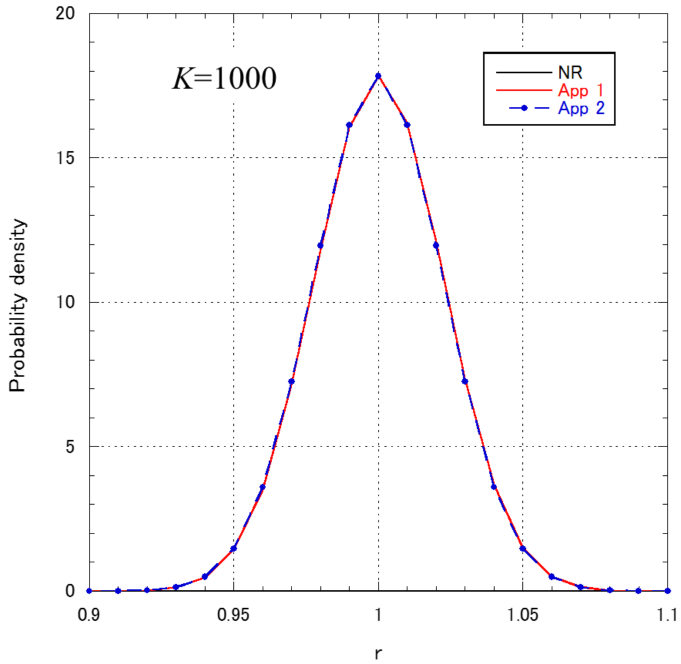


(b) *K*=10 (10 dB)　（近似式(app 1)は十分な精度）

図２　仲上・ライス分布の厳密式(NR)と近似式(app 1)とガウス分布近似(app 2)の比較



(c) K=100 (20 dB)　（正規分布近似でも十分成立）



(d) K=1000 (30 dB)　（NR は全て 0 になって正しく計算できていない）

図２　（続き）

４．まとめ

仲上・ライスフェージング環境を表す(3)式（振幅変動）や(4)式（電力変動）には変形ベッセル関数 I_0 が含まれ、ライスファクタ K が大きくなると I_0 の関数の性質から、正しい値が得られない場合がある。その場合には、I_0 の引数が大きいときに適用できる近似式を使って、式全体を書き換え、その式（振幅に対しては(8)式、電力に対しては(10)式）を用いて計算すると良い。$K \geq 10$ では、近似式の精度は実用上十分（誤差 1%以内）である

参考文献

[1] 唐沢好男、 *改訂 移動通信の電波伝搬基礎*、 コロナ社、2016.

[2] 森口繁一他、*数学公式 III*、岩波書店、1960/1993. （引用は 1993 年版で p. 173）.

本文で引用はしてないが、参考にした文献

[3] 奥井重彦、*特殊関数とその応用*、森北出版、1997. （9.4 節）.