

伝搬環境のレイトレーシング：その後どうする？

～ハンケル変換を用いて受信強度の確率分布を求める～

唐沢好男

1. レイトレーシング

第5世代以降のモバイルワイヤレス通信においては、これまで用いられてきた準マイクロ波帯より高い周波数の利用が盛んになると期待され、ミリ波帯の伝搬測定も盛んになっている[1], [2]。このような高い周波数ではビルなどの遮へい物に対して大きな減衰が生じるので、見通し内 (LOS)、あるいは、樹木や人間等、直接波に緩やかな遮へい減衰があるような環境 (準 LOS, sub-LOS (SLOS)) でのサービスが想定されるであろう。そして、そのためには、LOS を中心とした伝搬環境の把握が必要になる。

伝搬環境の把握には、フィールドでの測定実験と、机上での電磁界解析に大別でき、後者の代表がレイトレーシングである。両者はそれぞれに相補う利点・欠点をもつが、本稿では、後者のレイトレーシングに着目する。具体的なレイトレーシングの手法については、専門書[3]等で詳しく述べられているので、ここでは、レイトレーシングによって得られたデータをどうシステム設計に活かして行くかと言うことに焦点を絞る。「その後どうする？」の話である。

伝搬環境のレイトレーシングでは、伝送路はパス毎に定められ、指定の周波数・偏波に対するパス利得 a (複素量)、遅延 τ 、送信側のパス送出方向 θ_t 、受信側のパス到来方向 θ_r が算出される。図1はこの機能 (伝搬路構成要素) を示している。通信路の特性 h は次式で与えられる。

$$h(a, \tau, \theta_t, \theta_r) = \sum_{i=1}^N h_i \quad (1a)$$

$$h_i(a, \tau, \theta_t, \theta_r) = a_i \delta(\tau - \tau_i) \delta(\theta_t - \theta_{t,i}) \delta(\theta_r - \theta_{r,i}) \quad (1b)$$

このような形で、その送受信点間の生の特性が得られる。その場所に特化しているという意味でサイトスペシフィックな伝搬特性と呼ばれる。この生データをそのままシステム設計者に渡しても扱いに困ってしまうであろう。そこで、このデータから、その環境を反映する統計的な性質を導き出し、それを回線設計に活かすことになる。具体的には次のような特性である。

- 1) 受信強度の確率分布
- 2) パス方向の角度スペクトル
- 3) 遅延プロファイルと遅延スペクトル

1) の受信強度特性はリンクバジェットの算定に、2) の角度特性はアレーアンテナでの指向性制御やドップラースペクトル算定に、3) の遅延特性は広帯域信号の伝送評価や劣化対策に活かされる。これら統計的特性のうち、2) は角度データ $\theta_{t,i}$, $\theta_{r,i}$ から、3) は遅延量 τ_i から容易にその統計的性質を見出すことができる[4]。本資料では1) の受信強度の確率分布を理論的に求める方法を説明する。この方法は仲上稔博士が仲上 n 分布 (今日の仲上・ライス分布) を生み出すのに用いた方法であり[5]、文献[6] (9.4 節) に詳しい解説が有る。

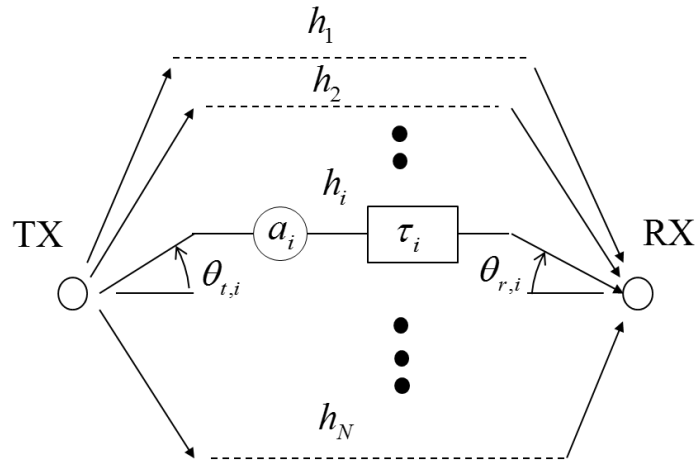


図1 レイトレーシングによって求められる伝搬路構成要素

2. 受信強度 (包絡線レベル) の確率分布

(1) 一般解とその特殊なケース

レイトレーシングで得られたそれぞれのパス利得をそのまま合成して、受信強度特性を調べることを考える。遅延の影響はないとする狭帯域信号の解析である。 N 個の素波よりなる合成信号 a は

$$a = \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \quad (2)$$

であり、 a_i の振幅と位相を r_i , ϕ_i と置いている。求めたい信号振幅 (包絡線) r は

$$r = \left| \sum_{i=1}^N a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \right| \quad (3)$$

である。各パスの振幅 r_i はその周囲のある程度の範囲で変わらないものであるが、位相 ϕ はまさにその地点だけのものであって、少しでも位置が変われば変化してしまう。特にミリ波など高い周波数ではミリメートル単位の場所移動でも大きく変化する。故に、位相に関してはランダムなもののみなして扱うのが理に適っている。

そこで、ここでは、(3)式の振幅 r が各位相がランダムな場合に、どのような確率分布になるかを求める方法について述べる。アプローチは2種類あり、一つが位相の部分に乱数

を用いて多数回のシミュレーション（いわゆる、モンテカルロシミュレーション）を行い統計量を得る方法、もう一つが、理論計算で求める方法である。本稿では、後者の解説を行う。

式(2)の形から、この確率分布はそれぞれに確率分布する量の和の分布である。和の分布は、畳み込み積分して求めて行くことになるので項の数が増えるとこのやり方ではうまく行かない。一方、そのような場合の常套手段として、それぞれの分布を特性関数に変換し、畳み込み積分が積の形に変換できることを利用して分布全体の特性関数を定め、それを逆変換によって、目的とする確率分布を求める方法がある。この特性関数への変換には種々の形が有り、フーリエ変換やラプラス変換が良く用いられる[4]。本稿が対象とする包絡線変動の確率分布には、ハンケル変換形特性関数（フーリエ・ベッセル変換とも呼ばれる）が便利である[6],[7]。ハンケル変換形特性関数の性質を付録にまとめており、本文では結果のみを示して行く。

確率密度関数を $f(r)$ 、特性関数を $g(k)$ とすると、ハンケル変換によって $f(r)$ と $g(k)$ は次式で結ばれる。

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr \quad (4a)$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \quad (4b)$$

累積分布関数 $F(r)$ は次式となる[6]。

$$F(r) = \int_0^r f(r) dr = r \int_0^{\infty} J_1(kr) g(k) dk \quad (5)$$

振幅一定で位相が一様分布する正弦信号の和の信号の包絡線の確率分布を求めるのに適しており、通信分野での応用では、周波数の異なる多数の正弦波が合成されたときの包絡線変動の確率分布を求めたいときなどである（詳しくは付録に）。

(3)式で与えられる振幅 r の確率分布（確率密度関数）を $f(r)$ とすると、ハンケル変換形特性関数は、付録でまとめているように、次式となる。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (6)$$

これより、確率密度関数 $f(r)$ および累積分布関数 $F(r)$ は次式で求められる。

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \quad (7)$$

$$F(r) = r \int_0^{\infty} J_1(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \quad (8)$$

この積分は、 $N=1 \sim 3$ やある特殊な条件を満たす関係を除いて閉形式には表すことが困難で、一般的には(7). (8)式を数値積分で求めることになる。

$N=1$ では、定包絡線信号であり、 $f(r)=\delta(r-r_1)$ である（これを求める必要性は何もない）。

$N=2$ と $N=3$ は積分が解け（数学公式集[8]の p.194, 195）、確率密度関数はそれぞれ次式で与えられる。 $N=2$ では

$$f(r; r_1, r_2) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_1) J_0(kr_2) dk$$

$$= \begin{cases} \frac{2r}{\pi \sqrt{-r^4 + 2(r_1^2 + r_2^2)r^2 - (r_1^2 - r_2^2)^2}} & (|r_1 - r_2| < r < r_1 + r_2) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \quad (9a)$$

$$f(r; 1, 1) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - r^2/4}} \quad (0 \leq r < 2) \quad (9b)$$

$N=3$ では

$$f(r; r_1, r_2, r_3) = r \int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr_1) J_0(kr_2) J_0(kr_3) dk$$

$$= \begin{cases} \frac{K(\sqrt{r_1 r_2 r_3 r / \Delta}) r}{\pi^2 \Delta} & \left(r < \frac{\Delta^2}{r_1 r_2 r_3} \right) \\ \frac{K(\Delta / \sqrt{r_1 r_2 r_3 r}) \sqrt{r}}{\pi^2 \sqrt{r_1 r_2 r_3}} & \left(r > \frac{\Delta^2}{r_1 r_2 r_3} \right) \\ 0 & (\Delta \text{が虚数になる範囲}) \end{cases} \quad (10a)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\prod_{i=1}^3 (r_1 + r_2 + r_3 + r - 2r_i) \right] (r_1 + r_2 + r_3 - r)} \quad (r \text{は根号内为正の範囲})$$

$$f(r; 1, 1, 1) = \begin{cases} \frac{K(\sqrt{r} / \Delta) r}{\pi^2 \Delta} & (r < \Delta^2) \\ \frac{K(\Delta / \sqrt{r}) \sqrt{r}}{\pi^2} & (r > \Delta^2) \\ 0 & (r \geq 3) \end{cases} \quad (10b)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(1+r)^3 (3-r)}$$

ここで、 K は第一種完全楕円積分である。

通常の評価（特に LOS 環境での）においては、特性に支配的な主要なパス数本とその他の多数な弱い波の集まりとみなすことができる場合が多い。主要なパスの数を L とし、残りの $N-L$ のパスについては電力をまとめて

$$\Delta P = \sum_{i=L+1}^N r_i^2 \equiv 2\sigma^2 \quad (11)$$

とする。 N が十分大きく、かつ、 r_i に突出した値の大きなものがなく、すなわち、似たようなものの集まりであるとする、この部分の特性関数は次式となる（根拠は付録に）。

$$g_{\Delta P}(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (12)$$

(12)式の特性関数の確率分布は

$$\begin{aligned} f(r) &= r \int_0^\infty k J_0(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

となり、レイリー分布である（積分解法は[8]の p.200）。

主要成分 L 波を含めたときの確率密度関数 $f(r)$ の特性関数は次式である。

$$g(k) = \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14)$$

この場合は、求める確率分布は次式となる。

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dk \quad (15)$$

$$F(r) = r \int_0^\infty J_1(kr) \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dk \quad (16)$$

この積分も $L=1$ を除いて閉形式には表すことが困難で、数値積分で求めることになる。

$L=1$ の場合にはこの積分は解けて（[8],p.200）、以下となる。

$$\begin{aligned}
 f(r) &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr_1) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \\
 &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_1^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

これは、仲上・ライス分布である。

【補足：上記の手順によって電波伝搬でお馴染みのレイリー分布や仲上・ライス分布が導かれた（仲上稔博士はこの手法によって導いた）が、それらの導出が目的であれば、一般的教科書（例えば[4]）で示されている方法（S.O. Rice が用いた手法）で学ぶ方が、理解が容易であろう。】

(2) 計算機シミュレーションによる確認

上式は理論的な意味で厳密な導出なので、シミュレーションを行えば一致するのが当然であるが、式の確認の意味でこれを行う。ここでは、 L 波の固定信号と不規則信号が合成された場合の累積分布を与える(16)式の確認を行う。

表1に示す3つのケースについて、式(16)の累積確率分布を求めた結果を図2に示す。シミュレーションでは、

$$r = \left| \sum_{i=1}^3 r_i \exp(j\phi_i) + x + jy \right| \tag{18}$$

として、 $\phi_1 \sim \phi_3$ を $0-2\pi$ の一様乱数、 x, y を分散 $\Delta P/2$ の独立正規乱数で与える。これを 10^6 回試行し、カーブが安定する累積確率 10^{-5} 以上をプロットしている。理論計算では、積分範囲が無限大まで広がっているのが厄介だが、最大振幅 r_1 が1の場合には（1でないときは、1になるように正規化すればよい）、積分の刻み幅 Δk ：0.001、計算ポイント数 K ：100,000、積分範囲の最大値 $k_{max}=K\Delta k$ ：100（この値は K と Δk で自動的に決まる）に設定すれば十分な精度で収束することを確認している。図より、各ケースとも理論計算値とシミュレーション値は非常によく一致しており、双方の評価の正しさが確認できている。（既に述べているように、シミュレーションデータが統計的に十分であれば一致するのは理論的に当然であるが、シミュレーションや、計算の正しさが確認されたと言うことに意味がある。）

表 1 評価環境のパラメータ設定値

Case	r_1	r_2	r_3	ΔP
1	1	0.4	0.3	0.01
2	1	0.7	0.5	0.04
3	1	0.9	0	0.04

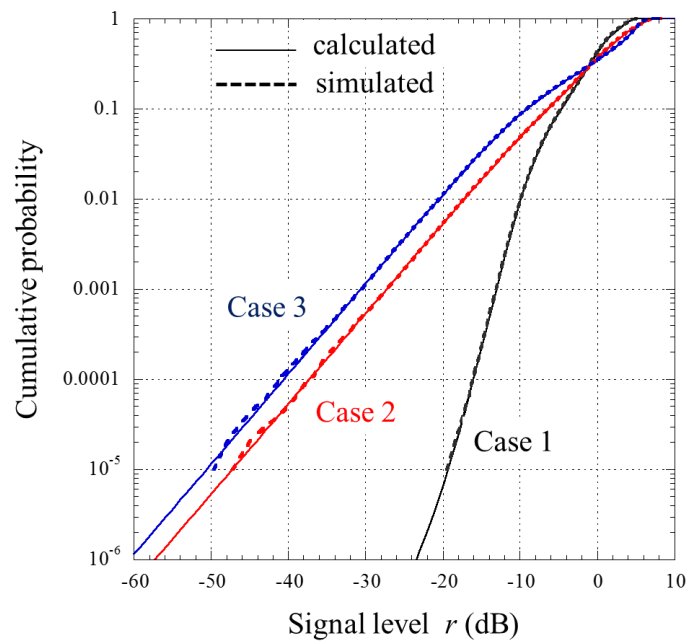


図 2 理論計算値とシミュレーションによる確認

3. まとめ

有限個の素波（パス）で構成されるマルチパス環境において、受信強度の確率分布を理論的に求める方法をまとめた。使っている手段はハンケル変換形特性関数で、1930年代後半に仲上稔博士が仲上 n 分布（今日の仲上・ライス分布）を導くのに用いた手段である [5],[9]。手段そのものは古典であるが、ミリ波伝搬の様な LOS 環境において支配的なパスが有限個であるようなマルチパス環境では、この手法による解析の重要性がより増してくると確信する。

式(3)の統計を出すだけなら計算機シミュレーションで簡単にできるし、それに比べてやや複雑な理論的な方法を知る必要はないと思うかもしれない。しかし、そのシミュレーションの結果が間違いないという確信を得るためにも、また、シミュレーションにおける通常確率分布範囲の限界を超えた領域（例えば累積確率の 10^{-6} 以下のような部分）を推定したい場合にも、理論的方法（定式化やプログラミングができてしまえば汎用的に使える方法）を学んでおくことは決して無駄ではない。

付録：ハンケル変換形特性関数とその基本的な性質

以下、ハンケル変換形特性関数の定義と、その基本的な性質をまとめる。ハンケル変換については文献[7] (p312)に、その応用については[6] (9.4 節) に詳しく述べられていて、本付録をまとめる際にもこれらの記述を参考にしている。

$(0, \infty)$ で定義された実関数 $\nu(x)$ が有り、 $f(x)$, $g(y)$ の間に相反的な積分変換の関係

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) \nu(xy) dx \quad (\text{A1a})$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(y) \nu(xy) dy \quad (\text{A1b})$$

が成立するとき、これを対称系の一般フーリエ変換、 $\nu(x)$ を一般フーリエ核という ([7])。次の

$$\nu(x) = \sqrt{x} J_0(x) \quad (\text{A2})$$

も(A1)式を満たし、これを核とする積分変換をハンケル変換と呼ぶ。(ハンケル変換自体は、高次のベッセル関数で一般的に定義され、(A2)式を核とする変換は0次のハンケル変換と呼ばれる[7]。本稿では、これをハンケル変換と呼ぶ)。フーリエ変換が実数領域の信号を複素数領域に展開する変換であるのに対して、ハンケル変換は実数領域から実数領域への変換であり、フーリエ変換の特別な場合と位置づけられる。

ハンケル変換は次式で書き表される。

$$g_1(y) = \int_0^{\infty} f_1(x) \sqrt{xy} J_0(xy) dx \quad (\text{A3a})$$

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} g_1(y) \sqrt{xy} J_0(xy) dy \quad (\text{A3b})$$

この形は、 f_1 と g_1 、 x と y について対称性がよいが、その変形としていくつかのタイプがある。例えば、

$$g_2(y) = \int_0^{\infty} f_2(x) x J_0(xy) dx \quad (\text{A4a})$$

$$f_2(x) = \int_0^{\infty} g_2(y) y J_0(xy) dy \quad (\text{A4b})$$

あるいは

$$g_3(y) = \int_0^{\infty} f_3(x) J_0(xy) dx \quad (\text{A5a})$$

$$f_3(x) = x \int_0^{\infty} g_3(y) y J_0(xy) dy \quad (\text{A5b})$$

ここでは、包絡線変動の解析に都合が良く、仲上らが用いてきた f_3, g_3 の変換対 (式(A5)) を採用する。 $f_3 \rightarrow f, g_3 \rightarrow g, x \rightarrow r, y \rightarrow k$ として本文記述の変数にあわせると

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr \quad (\text{A6a})$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \quad (\text{A6b})$$

である (式(4)の再掲)。

ハンケル変換が成立していることの確認は骨が折れる (次式3行目の[]の積分解法) が、概ね以下の手順による (導出の詳細は[10]の 1.2.2)。

$$\begin{aligned} (\text{A6b})\text{式の右辺} &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \\ &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \left[\int_0^{\infty} J_0(kr') f(r') dr' \right] dk \\ &= r \int_0^{\infty} f(r') \left[\int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr') dk \right] dr' \\ &= r \int_0^{\infty} f(r') \frac{1}{r'} \delta(r' - r) dr' = f(r) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

素波 i の複素振幅 $a_i (= r_i \exp \phi_i)$ の振幅 r_i は一定、位相 ϕ_i は $0 \sim 2\pi$ で一様分布とする。このとき、振幅 r 、位相 ϕ の2次元確率分布 (確率密度関数) $f_{r\phi}$ は、

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \delta(r - r_i) \quad (\text{A8})$$

である。

この確率分布のハンケル変換形特性関数 (式(A6a)による) を求めると

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^{\infty} J_0(kr) \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi dr \\ &= \int_0^{\infty} J_0(kr) \delta(r - r_i) dr = J_0(kr_i) \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

となり、ベッセル関数になる。

次に振幅 r_1 と r_2 の2波が合成された信号の包絡線の確率分布を求める。振幅 r は

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \quad (\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1) \quad (\text{A10})$$

であり、位相差 $\Delta\phi$ は $0 \sim 2\pi$ で一様分布である。要素の $r_1, r_2, \Delta\phi$ が一定値のとき、特性関数

$g(k)$ は(A9)式と(A10)式より、

$$g(k, \Delta\phi) = J_0\left(k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}\right) \quad (\text{A11})$$

位相差 $\Delta\phi$ は一様に分布するので、 $\Delta\phi$ 領域で積分した特性関数は

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\left(k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}\right) d\Delta\phi \quad (\text{A12})$$

となる。ノイマンの加法定理により ([7]の p.218)、

$$\begin{aligned} J_0\left(k\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi}\right) \\ = J_0(kr_1)J_0(kr_2) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_1)J_n(kr_2)\cos n\Delta\phi \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

であるので、上式の右辺第2項以降 (Σ の部分) は(A12)式での積分が全て0になり

$$g(k) = J_0(kr_1)J_0(kr_2) \quad (\text{A14})$$

となる。

一般に、 N 個の波の合成振幅の特性関数は、それぞれの特性関数の積である以下の形になることが導かれている[6]。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (\text{A15})$$

本文の式(6)はこのようにして求められたものである。一連の式展開を見ると、ハンケル変換の式として、式(A5)の g_3 の形が包絡線分布の解析には適したものであったと理解できる。

次に、 N が十分に大きい場合でかつ r_i の値がほぼ同等の場合の特性関数の近似式を求める。以下、次々と近似を行ってゆく。

$$\begin{aligned} g(k) &= \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \\ &\approx [J_0(kr_i)]^N \quad (r_i \text{は代表値}) \\ &\approx \left[1 - \frac{(kr_i)^2}{4} + \frac{(kr_i)^4}{64} - \frac{(kr_i)^6}{2304} + \dots\right]^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx 1 - \frac{N(kr_i)^2}{4} + \frac{N^2(kr_i)^4}{32} - \frac{N^3(kr_i)^6}{384} + \dots \\
&= 1 - \frac{N(kr_i)^2}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N(kr_i)^2}{4} \right\}^2 - \frac{1}{6} \left\{ \frac{N(kr_i)^2}{4} \right\}^3 + \dots \\
&\approx \exp\left(-\frac{N(kr_i)^2}{4}\right) \\
&\approx \exp\left(-\frac{k^2 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4}\right) \tag{A16}
\end{aligned}$$

となり、本文の(12)式が得られる。途中の多項式の N 乗の展開は多項定理から係数を求め、かつ、 N が十分大きいことを仮定している。

参考文献

- [1] T. S. Rapport, R. MacCartny, M. K. Samimi, and S. Sun, "Wideband millimeter-wave propagation measurements and channel models for future wireless communication system design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 63, no.9, pp. 3029-3056, 2015.
- [2] 今井哲朗, 北尾光司郎, トラン ゴクハオ, 大巻信貴, "5G のための電波伝搬," NTT DOCOMO テクニカルジャーナル, vol. 23, no. 4, pp. 40-48, 2016.01.
- [3] 今井哲朗, 電波伝搬解析のためのレイトレーシング法, コロナ社, 2016.
- [4] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [5] 仲上稔, "位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究," 電気通信学会誌, no. 202, 1940.01.
- [6] 奥井重彦, 特殊関数とその応用, 森北出版, 1997.
- [7] 森口繁一他, 数学公式 II, 岩波書店, 1957/1992.
- [8] 森口繁一他, 数学公式 III, 岩波書店, 1960/1993.
- [9] 唐沢好男, "電波伝搬：物理現象とモデリング -先達の足跡をたどる-, " 信学誌, vol. 99, no. 8, pp. 792-798, 2016.
https://www.journal.ieice.org/bin/pdf_link.php?fname=k99_8_792&lang=J&year=2016
- [10] 世戸憲治, 中西襄, "半無限弾性棒の弾丸衝突問題に基づく Fourier 変換の拡張," 数学・物理通信, vol. 3, no. 2, 2013.03.