

伝搬環境のレイトレーシング：その後どうする？

～ハンケル変換形特性関数を用いる受信強度の確率分布について～

唐沢好男

伝搬環境評価の有力手段としてレイトレーシングがある。本レポートでは、レイトレーシングによって得られたパス解析データから、受信強度の確率分布を求める方法をまとめる。解析の手法は、ハンケル変換形の特性関数を用いる。解析手法そのものは古典的なものであるが、手段として身に着けておくと便利である。ミリ波伝搬のように直接波と特定な数のマルチパス波よりなる環境の解析に適している。なお、本レポートは同タイトル：TR-YK-043 (March 17, 2020)の改訂版である。初版に対して、記述の充実（と記述ミスの修正）を図っている。

1. レイトレーシング

第5世代以降のモバイルワイヤレス通信においては、これまで用いられてきた準マイクロ波帯より高い周波数の利用が盛んになると期待され、ミリ波帯の伝搬測定も盛んになっている[1], [2]。このような高い周波数ではビルなどの遮へい物に対して大きな減衰が生じるので、見通し内(LOS)、あるいは、樹木や人間等、直接波に緩やかな遮へい減衰があるような環境(準LOS, semi-LOS (SLOS))でのサービスが想定されるであろう[3]。そして、そのためには、LOSを中心とした伝搬環境の把握が必要になる。

伝搬環境の把握には、フィールドでの測定実験と、机上での電磁界解析に大別でき、後者の代表がレイトレーシングである。両者はそれぞれに相補う利点・欠点をもつが、本レポートでは、後者のレイトレーシングに着目する。具体的なレイトレーシングの手法については、専門書[4]等で詳しく述べられているので、ここでは、レイトレーシングによって得られたデータをどうシステム設計に活かして行くかと言うことに焦点を絞る。「その後どうする？」の話である。

伝搬環境のレイトレーシングでは、伝送路はパス毎に定められ、指定の周波数・偏波に対するパス利得 a (複素量)、遅延 τ 、送信側のパス送出方向 θ_t 、受信側のパス到来方向 θ_r が算出される。図1はこの機能(伝搬路構成要素)を示している。通信路の特性 h は次式で与えられる。

$$h(\tau, \theta_t, \theta_r) = \sum_{i=1}^N h_i(\tau, \theta_t, \theta_r) \quad (1a)$$

$$h_i(\tau, \theta_t, \theta_r) = a_i \delta(\tau - \tau_i) \delta(\theta_t - \theta_{t,i}) \delta(\theta_r - \theta_{r,i}) \quad (1b)$$

このような形で、その送受信点間の生の特性が得られる。その場所に特化しているという意味でサイトスペシフィックな伝搬特性と呼ばれる。この生データをそのままシステム設計者に渡し

でも扱いに困ってしまうであろう。そこで、このデータから、その環境を反映する統計的な性質を導き出し、それを回線設計に活かすことになる。具体的には次のような特性である。

- ① 受信強度の確率分布
- ② パス方向の角度スペクトル
- ③ 遅延プロファイルと遅延スプレッド

①の受信強度特性はリンクバジェットの算定に、②の角度特性はアレーアンテナでの指向性制御やドップラースペクトル算定に、③の遅延特性は広帯域信号の伝送評価や劣化対策に活かされる。これら統計的特性のうち、②は角度データ $\theta_{t,i}$, $\theta_{r,i}$ から、③は遅延量 τ_i から容易にその統計的性質を見出すことができる[5]。本レポートでは①の受信強度の確率分布を理論的に求める方法を説明する。この方法は仲上稔博士が仲上 n 分布（今日の仲上・ライス分布）を生み出すのに用いた方法であり[6]、文献[7]（9.4節）に詳しい解説がある。

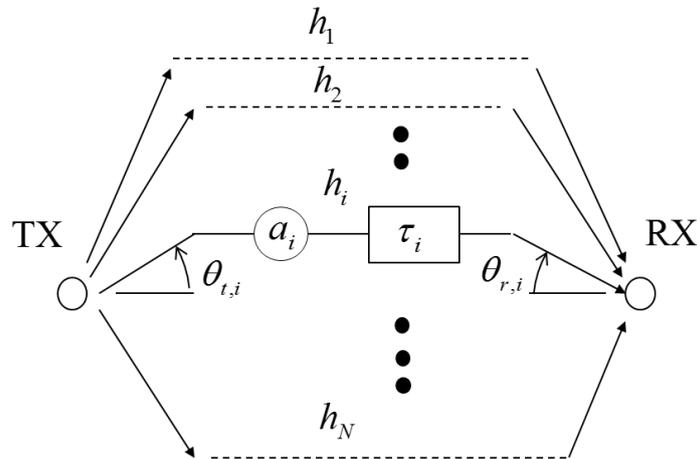


図1 レイトレーシングによって求められる伝搬路構成要素

2. 受信強度（包絡線レベル）の確率分布

2.1 一般解とその特殊なケース

(1) 一般解

レイトレーシングで得られたそれぞれのパス利得をそのまま合成して、受信強度特性を調べることを考える。遅延の影響はないとする狭帯域信号の解析である。 N 個の素波よりなる合成信号 a は

$$a = \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \quad (2)$$

であり、 a_i の振幅と位相を r_i, ϕ_i と置いている。求めたい信号振幅（包絡線） r は

$$r = \left| \sum_{i=1}^N a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^N r_i \exp(j\phi_i) \right| \quad (3)$$

である。各パスの振幅 r_i はその周囲のある程度の範囲で変わらないものであるが、位相 ϕ_i はまさにその地点だけのものであって、少しでも位置が変われば変化してしまう。特にミリ波など高い周波数ではミリメートル単位の場所移動でも大きく変化する。故に、位相に関してはランダムなもののみならず扱うのが理に適っている。

そこで、ここでは、(3)式の各位相がランダムな場合に、信号振幅 r がどのような確率分布になるかを求める方法について述べる。アプローチは2種類あり、一つが位相の部分に乱数を用いて多数回のシミュレーション（いわゆる、モンテカルロシミュレーション）を行い統計量を得る方法、もう一つが、理論計算で求める方法である。本レポートでは、後者の解説を行う。

式(2)の形から、この確率分布はそれぞれに確率分布する量の和の分布である。和の分布は、畳み込み積分して求めて行くことになるので項の数が増えるとこのやり方ではうまく行かない。一方、そのような場合の常套手段として、それぞれの分布を特性関数に変換し、畳み込み積分が積の形に変換できることを利用して分布全体の特性関数を定め、それを逆変換によって、目的とする確率分布を求める方法がある。この特性関数への変換には種々の形が有り、フーリエ変換やラプラス変換が良く用いられる[5]。本レポートが対象とする包絡線変動の確率分布には、ハンケル変換形特性関数（フーリエ・ベッセル変換とも呼ばれる）が便利である[7],[8]。ハンケル変換形特性関数の基本的性質を付録1にまとめており、本文では結果のみを示して行くが、その便利さ（有効性）を知ってもらうことが本レポートの主な目的である。

確率密度関数を $f(r)$ 、特性関数を $g(k)$ とすると、ハンケル変換によって $f(r)$ と $g(k)$ は次式で結ばれる。

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr \quad (4a)$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \quad (4b)$$

累積分布関数 $F(r)$ は次式となる[7]。

$$F(r) = \int_0^r f(r) dr = r \int_0^{\infty} J_1(kr) g(k) dk \quad (5)$$

振幅一定で位相が一様分布する正弦信号の和の信号の包絡線の確率分布を求めるのに適しており、通信分野での応用では、周波数の異なる多数の正弦波が合成されたときの包絡線変動の確率分布を求めたいときなどである（詳しくは付録1に）。

(2) 振幅一定の複数波の合成

(3)式で与えられる振幅 r の確率分布（確率密度関数）を $f(r)$ とすると、ハンケル変換形特性関数は、付録1でまとめているように、次式となる。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (6)$$

これより、確率密度関数 $f(r)$ および累積分布関数 $F(r)$ は次式で求められる。

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \quad (7)$$

$$F(r) = r \int_0^{\infty} J_1(kr) \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) dk \quad (8)$$

この積分は、 $N=1 \sim 3$ を除いて閉形式には表すことが困難で、一般的には(7). (8)式を数値積分で求めることになる。求めたい式が、式(7)あるいは(8)のように積分形であって、かつ、その積分範囲が無限大になっていると、使いたくない気持ちが湧くと思うが、付録2に示すように、積分範囲の上限や刻み幅については目安があり、あまり心配することは無い。特に、累積分布は確率密度関数の積分になるので、通常はひとつ積分の多重度が増えることになるが、式(8)は、確率密度関数と同じ一重積分であり、この点もありがたい。

$N=1$ では、定包絡線信号であり、 $f(r)=\delta(r-r_1)$ である（これを求める必要性は何もない）。

$N=2$ と $N=3$ は積分が解け（数学公式集[9]の p.194, 195）、確率密度関数はそれぞれ次式で与えられる。 $N=2$ では

$$f(r; r_1, r_2) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr_1) J_0(kr_2) dk$$

$$= \begin{cases} \frac{2r}{\pi \sqrt{-r^4 + 2(r_1^2 + r_2^2)r^2 - (r_1^2 - r_2^2)^2}} & (|r_1 - r_2| < r < r_1 + r_2) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \quad (9a)$$

$$f(r; 1, 1) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - r^2/4}} \quad (0 \leq r < 2) \quad (9b)$$

$N=3$ では

$$f(r; r_1, r_2, r_3) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr_1) J_0(kr_2) J_0(kr_3) dk$$

$$= \begin{cases} \frac{K(\sqrt{r_1 r_2 r_3 r / \Delta}) r}{\pi^2 \Delta} & \left(r < \frac{\Delta^2}{r_1 r_2 r_3} \right) \\ \frac{K(\Delta / \sqrt{r_1 r_2 r_3 r}) \sqrt{r}}{\pi^2 \sqrt{r_1 r_2 r_3}} & \left(r > \frac{\Delta^2}{r_1 r_2 r_3} \right) \\ 0 & (\Delta \text{ が虚数になる範囲}) \end{cases} \quad (10a)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\prod_{i=1}^3 (r_1 + r_2 + r_3 + r - 2r_i) \right] (r_1 + r_2 + r_3 - r)} \quad (r \text{ は根号内为正の範囲})$$

$$f(r; 1, 1, 1) = \begin{cases} \frac{K(\sqrt{r}/\Delta) r}{\pi^2 \Delta} & (r < \Delta^2) \\ \frac{K(\Delta/\sqrt{r}) \sqrt{r}}{\pi^2} & (r > \Delta^2) \\ 0 & (r \geq 3) \end{cases} \quad (10b)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(1+r)^3 (3-r)}$$

ここで、 K は第一種完全楕円積分である。(注: 付録 2 では仲上・ライス分布のライスファクタを、同じ K として用いているが、別物である)

(3) 振幅一定の複数波と不規則波の合成

通常の評価 (特に LOS 環境での) においては、特性に支配的な主要なパス数本とその他の多数の弱い波の集まりとみなすことができる場合が多い。主要なパスの数を L とし、残りの $N-L$ のパスについては電力をまとめて

$$\Delta P = \sum_{i=L+1}^N r_i^2 \equiv 2\sigma^2 \quad (11)$$

とする。 N が十分大きく、かつ、 r_i に突出した値の大きなものがなく、すなわち、似たようなものの集まりであるとする、この部分の特性関数は次式となる (根拠は付録 1 に)。

$$g_{\Delta P}(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (12)$$

(12) 式の特性関数の確率分布は

$$f(r) = r \int_0^\infty k J_0(kr) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

となり、レイリー分布である (積分解法は[9]の p.200)。

主要成分 L 波を含めたときの確率密度関数 $f(r)$ の特性関数は次式である。

$$g(k) = \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (14)$$

この場合は、求める確率分布は次式となる。

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \quad (15)$$

$$F(r) = r \int_0^{\infty} J_1(kr) \prod_{i=1}^L J_0(kr_i) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \quad (16)$$

この積分も $L=1$ を除いて閉形式には表すことが困難で、数値積分で求めることになる。

$L=1$ の場合にはこの積分は解けて ([9],p.200)、以下となる。

$$\begin{aligned} f(r) &= r \int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr_1) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) dk \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r_1^2 + r^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

これは、仲上・ライス分布である。

【補足：上記の手順によって電波伝搬でお馴染みのレイリー分布や仲上・ライス分布が導かれた（仲上稔博士は仲上・ライス分布（当時の n 分布）をこの手法によって導いた）が、分布の導出が目的であれば、一般の教科書（例えば[5]）で示されている方法（S.O. Rice が用いた手法）で学ぶ方が、理解が容易であろう。】

（４）積分の数値計算

(15)式の積分が閉形式で解けるのは、レイリー分布や仲上・ライス分布のように限られたケースのみであるため、一般には、数値積分で求めることになる。積分範囲が無量大まで広がっているのが厄介だが、その積分を最もシンプルな次式で求めるとすると、

$$f(r) = r \sum_{m=0}^{k_{\max}/\Delta k} k_m J_0(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k \quad (k_m = m\Delta k) \quad (18)$$

$$F(r) = r \sum_{m=0}^{k_{\max}/\Delta k} J_1(k_m r) \prod_{i=1}^L J_0(k_m r_i) \exp\left(-\frac{\Delta P k_m^2}{4}\right) \Delta k \quad (19)$$

であり、 k の上限値 k_{\max} と積分の刻み幅 Δk を適切に定めなければならない。安全をとって k_{\max} を大きくしすぎたり、 Δk を小さくしすぎたりすると、積分計算に時間がかかることになるので、適度な値に定める必要がある。これに関しては、付録 2 の積分精度評価で示すように、以下の目安値を用いればよい（適用の注意点を含めた根拠の詳細は付録 2 に）。

$$k_{\max} \geq 10,000 / \sqrt{P_r}, \quad \Delta k \leq 0.1 / \sqrt{P_r} \quad (20)$$

$$P_r = \sum_{i=1}^L r_i^2 + \Delta P \quad \left(\Delta P = \sum_{i=L+1}^N r_i^2 \right)$$

2.2 計算機シミュレーションによる確認

(15), (16)式は理論的な意味で厳密な導出なので、シミュレーションを行えば一致するのが当然であるが、式の確認の意味でこれを行う。ここでは、 L 波の固定信号と不規則信号が合成された場合の累積分布を与える(16)式の確認を、(19)式による数値積分とシミュレーション結果との比較で行う。シミュレーションでは乱数を用い、 10^7 回試行し、結果が安定している累積確率 10^{-5} 以上を示している。ゆえに、シミュレーション結果は理論値を代理していると理解してほしい(一致しない場合は、数値積分計算の方に間違いがあるかあるいは誤差があるかという意味)。

表1に示す4つのケースについて、式(16)の累積確率分布を求めた結果を図2に示す。図2の積分計算値は式(20)の目安値(不等式を等式に替えた)を用いている。図より、各ケースとも理論計算値とシミュレーション値は非常によく一致しており、双方の評価の正しさが確認できている。厳密に見ると、Case 4のように、一波のみが強い環境では、すなわち、信号レベル低下が小さいケースでは、累積確率の小さい部分の計算値に少し誤差が出ているので、このようなケースへの適用には注意が必要である。(Case 4のずれについては、 Δk を目安値より一桁小さく設定することで解消できることを確認している(付録2の図A3参照))。

3. まとめ

有限個の素波(パス)で構成されるマルチパス環境において、受信強度の確率分布を理論的に求める方法をまとめた。使っている手段はハンケル変換形特性関数で、1930年代後半に仲上稔博士が仲上 n 分布(今日の仲上・ライス分布)を導くのに用いた手法である[6],[10]。手段そのものは古典であるが、ミリ波伝搬の様なLOS環境において支配的なパスが有限個であるようなマルチパス環境では、この手法による解析の重要性がより増してくると確信する。答えを出すのに一重とは言え積分が入り、それも無限大区間の数値積分となって厄介だが、設定の目安値が把握できていれば、今の時代(=計算機の演算速度が極めて速い)において、その計算を恐れることは無い。累積分布を出したいときは、確率密度関数を積分しなければならないが、ここで述べた手法では、確率密度関数も累積分布関数も一回だけの積分で済むことが嬉しい。

式(3)の統計を出すだけなら計算機シミュレーションで簡単にできるし、それに比べてやや複雑な理論的な方法を知る必要はないと思うかもしれない。しかし、そのシミュレーションの結果が間違いがないという確信を得るためにも、また、シミュレーションにおける通常の変率分布範囲の限界を超えた領域(例えば累積確率の 10^{-6} 以下のような部分)を推定したい場合にも、理論的方法(定式化やプログラミングができてしまえば汎用的に使える方法)を学んでおくことは決して無駄ではない。

表 1 評価環境のパラメータ設定値

Case	r_1	r_2	r_3	ΔP
1	1	0.5	0.3	0.5
2	1	0.4	0.3	0.1
3	1	0.3	0.2	0.05
4	1	0.2	0.1	0.01

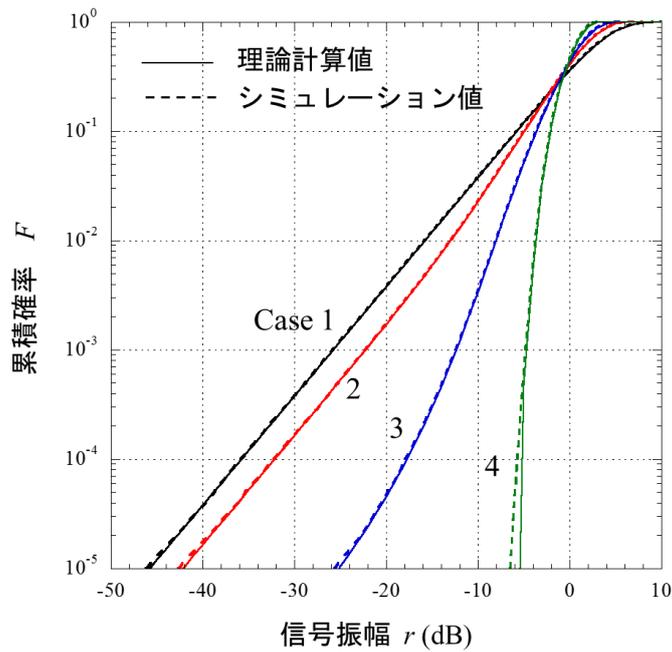


図 2 表 1 の 4 つのケースにおける合成振幅の累積確率の理論計算（数値積分）値とシミュレーション値

付録 1 ハンケル変換形特性関数とその基本的な性質

以下、ハンケル変換形特性関数の定義と、その基本的な性質をまとめる。ハンケル変換については文献[8] (p312)に、その応用については[7] (9.4 節) に詳しく述べられていて、本付録をまとめる際にもこれらの記述を参考にしている。

(0, ∞)で定義された実関数 $v(x)$ が有り、 $f(x)$, $g(y)$ の間に相反的な積分変換の関係

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)v(xy)dx \tag{A1a}$$

$$f(x) = \int_0^\infty g(y)v(xy)dy \tag{A1b}$$

が成立するとき、これを対称系の一般フーリエ変換、 $v(x)$ を一般フーリエ核という ([8])。次の

$$v(x) = \sqrt{x} J_0(x) \quad (\text{A2})$$

も(A1)式を満たし、これを核とする積分変換をハンケル変換と呼ぶ。(ハンケル変換自体は、高次のベッセル関数で一般的に定義され、(A2)式を核とする変換は0次のハンケル変換と呼ばれる[8]。本レポートでは、これをハンケル変換と呼ぶ)。フーリエ変換が実数領域の信号を複素数領域に展開する変換であるのに対して、ハンケル変換は実数領域から実数領域への変換であり、フーリエ変換の特別な場合と位置づけられる。

ハンケル変換は次式で書き表される。

$$g_1(y) = \int_0^{\infty} f_1(x) \sqrt{xy} J_0(xy) dx \quad (\text{A3a})$$

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} g_1(y) \sqrt{xy} J_0(xy) dy \quad (\text{A3b})$$

この形は、 f_1 と g_1 、 x と y について対称性がよいが、その変形としていくつかのタイプがある。例えば、

$$g_2(y) = \int_0^{\infty} f_2(x) x J_0(xy) dx \quad (\text{A4a})$$

$$f_2(x) = \int_0^{\infty} g_2(y) y J_0(xy) dy \quad (\text{A4b})$$

あるいは

$$g_3(y) = \int_0^{\infty} f_3(x) J_0(xy) dx \quad (\text{A5a})$$

$$f_3(x) = x \int_0^{\infty} g_3(y) y J_0(xy) dy \quad (\text{A5b})$$

ここでは、包絡線変動の解析に都合が良く、仲上らが用いてきた f_3 、 g_3 の変換対(式(A5))を採用する。 $f_3 \rightarrow f$ 、 $g_3 \rightarrow g$ 、 $x \rightarrow r$ 、 $y \rightarrow k$ として本文記述の変数にあわせると

$$g(k) = \int_0^{\infty} J_0(kr) f(r) dr \quad (\text{A6a})$$

$$f(r) = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk \quad (\text{A6b})$$

である(式(4)の再掲)。

ハンケル変換が成立していることの確認は骨が折れる(次式3行目の[]の積分解法)が、概ね以下の手順による(導出の詳細は[11]の1.2.2)。

$$(\text{A6b})\text{式}\text{の}\text{右}\text{辺} = r \int_0^{\infty} k J_0(kr) g(k) dk$$

$$\begin{aligned}
&= r \int_0^\infty k J_0(kr) \left[\int_0^\infty J_0(kr') f(r') dr' \right] dk \\
&= r \int_0^\infty f(r') \left[\int_0^\infty k J_0(kr) J_0(kr') dk \right] dr' \\
&= r \int_0^\infty f(r') \frac{1}{r'} \delta(r' - r) dr' = f(r)
\end{aligned} \tag{A7}$$

素波 i の複素振幅 $a_i (= r_i \exp \phi_i)$ の振幅 r_i は一定、位相 ϕ_i は $0 \sim 2\pi$ で一様分布とする。このとき、振幅 r 、位相 ϕ の 2 次元確率分布（確率密度関数） $f_{r\phi}$ は以下である。

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \delta(r - r_i) \tag{A8}$$

この確率分布のハンケル変換形特性関数（式(A6a)による）を求めると

$$\begin{aligned}
g(k) &= \int_0^\infty J_0(kr) \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi) d\phi dr \\
&= \int_0^\infty J_0(kr) \delta(r - r_i) dr = J_0(kr_i)
\end{aligned} \tag{A9}$$

となり、ベッセル関数になる。

次に振幅 r_1 と r_2 の 2 波が合成された信号の包絡線の確率分布を求める。振幅 r は

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \quad (\Delta\phi \equiv \phi_2 - \phi_1) \tag{A10}$$

であり、位相差 $\Delta\phi$ は $0 \sim 2\pi$ で一様分布である。要素の $r_1, r_2, \Delta\phi$ が一定値のとき、特性関数 $g(k)$ は (A9) 式と (A10) 式より、

$$g(k, \Delta\phi) = J_0 \left(k \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \right) \tag{A11}$$

位相差 $\Delta\phi$ は一様に分布するので、 $\Delta\phi$ 領域で積分した特性関数は

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0 \left(k \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \right) d\Delta\phi \tag{A12}$$

となる。ノイマンの加法定理 ([8] の p.218) により、

$$J_0 \left(k \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \Delta\phi} \right)$$

$$= J_0(kr_1)J_0(kr_2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_1)J_n(kr_2) \cos n\Delta\phi \quad (\text{A13})$$

であるので、上式の右辺第2項以降（ Σ の部分）は(A12)式での積分が全て0になり

$$g(k) = J_0(kr_1)J_0(kr_2) \quad (\text{A14})$$

となる。

一般に、 N 個の波の合成振幅の特性関数は、それぞれの特性関数の積である以下の形になることが導かれている[7]。

$$g(k) = \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \quad (\text{A15})$$

本文の式(6)はこのようにして求められたものである。一連の式展開を見ると、ハンケル変換の式として、式(A5)の g_3 の形が包絡線分布の解析には適したものであったと理解できる。

次に、 N が十分に大きい場合でかつ r_i の値がほぼ同等の場合の特性関数の近似式を求める。以下、次々と近似を行ってゆく。

$$\begin{aligned} g(k) &= \prod_{i=1}^N J_0(kr_i) \approx [J_0(kr_i)]^N \quad (r_i \text{ は代表値}) \\ &\approx \left[1 - \frac{(kr_i)^2}{4} + \frac{(kr_i)^4}{64} - \frac{(kr_i)^6}{2304} + \dots \right]^N \\ &\approx 1 - \frac{N(kr_i)^2}{4} + \frac{N^2(kr_i)^4}{32} - \frac{N^3(kr_i)^6}{384} + \dots \\ &= 1 - \frac{N(kr_i)^2}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N(kr_i)^2}{4} \right\}^2 - \frac{1}{6} \left\{ \frac{N(kr_i)^2}{4} \right\}^3 + \dots \\ &\approx \exp\left(-\frac{N(kr_i)^2}{4} \right) \\ &\approx \exp\left(-\frac{k^2 \sum_{i=1}^N r_i^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

となり、本文の(12)式が得られる。途中の多項式の N 乗の展開は多項定理から係数を求め、かつ、 N が十分大きいことを仮定している。

付録2 特性関数逆変換時の積分の上限値と刻み幅の設定に関する目安

式(15)の確率密度関数、式(16)の累積分布関数は積分範囲が無限大なので、実際に数値計算したいときには、積分範囲の上限値 k_{max} とステップ幅 Δk の目安値が必要になる。この目安値について、いくつかのシミュレーションを例にまとめる。

一般論として、確率変数 r と特性関数の変数 k はフーリエ変換の時間と周波数の関係と同様に、

- i) r の小さい変化の部分を精度よく求めたいためには、 k の値 (k_{max}) が大きいところまで計算する必要がある
- ii) r の大きい値の部分を精度よく求めたい場合は、 k の刻み幅 (Δk) を小さくしなければならない
- iii) k_{max} および Δk の目安値は r の実効値の逆数に比例する

論より証拠、次の例を見てみよう。等振幅の N 波 ($N=2\sim 5$) があり、それぞれの振幅を $1/\sqrt{N}$ とする (すなわち、平均受信電力 $P_r=1$)。本文でも述べたように $N=2$ と 3 では、確率分布は閉形式で求められるが、ここでは、全部を積分式で求める。比較検証のためのシミュレーションは乱数を用いて 10^7 回行い、統計が安定して現れる累積確率 10^{-5} 以上を示す。図 A1 は、積分の数値計算において、 $k_{max}=10,000$ 、 $\Delta k=0.1$ に設定したときの結果で、シミュレーション値とぴったりあっている。参考までに、同図には、レイリー分布の理論式 (積分ではなく計算式) による結果も示している。等振幅の 5 波程度が集まると、かなり良いレイリー分布近似になると言われているが、図はそのことを表している。

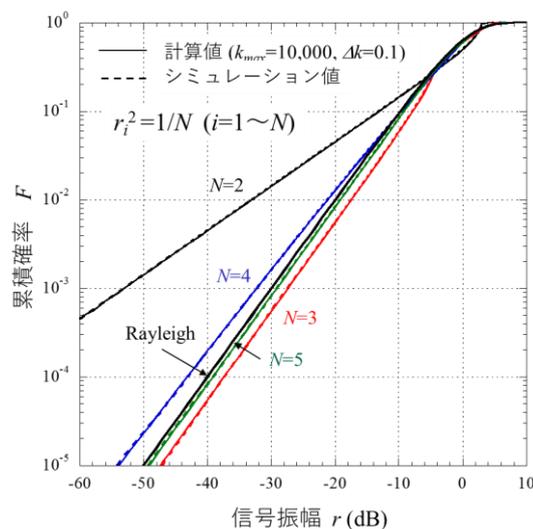


図 A1 等振幅 N 波合成での振幅の累積確率分布：積分の数値計算値 vs. シミュレーション値

積分の設定値： k_{max} と Δk の目安値を調べるために、図 A1 の N 波合成の場合について、 Δk 一定 (=0.1) のもと、 k_{max} を 100, 1,000, 10,000 とすると、誤差は $N=2$ に現れ、図の範囲では $k_{max}=10,000$ で十分な精度になった。また、 k_{max} 一定 (=10,000) のもと、 Δk を 0.01, 0.1, 1 とすると、 $\Delta k=1$ に

対して、 $r > 0$ dB で誤差が見えてきた。この評価では、いずれの場合も振幅 r の実効値が 1 の場合であったが、上記 iii) の性質より、 Δk や k_{\max} は r の実効値に反比例するので、本文の(20)式で示した $k_{\max} \geq 10,000/\sqrt{P_r}$ 、 $\Delta k \leq 0.1/\sqrt{P_r}$ を目安とした。

図 A1 で誤差が最も現れやすかった $N=2$ の場合について、 $r_1=1$ で固定の下、 $r_2=1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ とした場合の累積分布を図 A2 に示す。計算値とシミュレーション値は非常によく一致し、目安値 (式(20)の不等式を等式に替えたもの) での設定で精度に問題ないことが見て取れる。図 A3 は仲上・ライス分布の環境で、 $r_1^2+\Delta P=1$ の下、ライスファクタ $K (=r_1^2/\Delta P)$ の dB 値をパラメータにして示している。図で実線の計算値(1)は積分計算で積分のパラメータを目安値に設定したものである。図より、ライスファクタ K が 10dB より大きいケースで、シミュレーション値との間にわずかなずれが見える。刻み幅を目安値の 1/10 にする ($\Delta k = 0.01/\sqrt{P_r}$) と、点で示したようにシミュレーション値とのずれが消えることが分かる。こういう特殊な場合 (この場合は、確率密度関数がデルタ関数に近くなっている) には、確率分布の見たい部分に着目して、積分パラメータの設定変更が必要になる。そういう意味で、上で述べた目安値はあくまでも目安値であると思ってほしい。

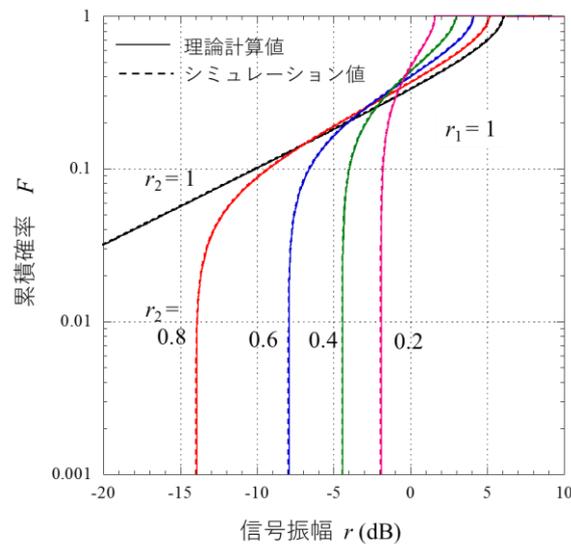


図 A2 不等振幅 2 波合成での振幅の累積確率分布：積分の数値計算値 vs. シミュレーション値

参考文献

- [1] T. S. Rapport, R. MacCartny, M. K. Samimi, and S. Sun, "Wideband millimeter-wave propagation measurements and channel models for future wireless communication system design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 63, no.9, pp. 3029-3056, 2015.
- [2] 今井哲朗, 北尾光司郎, トラン ゴクハオ, 大巻信貴, "5G のための電波伝搬," NTT DOCOMO テクニカルジャーナル, vol. 23, no. 4, pp. 40-48, 2016.01.

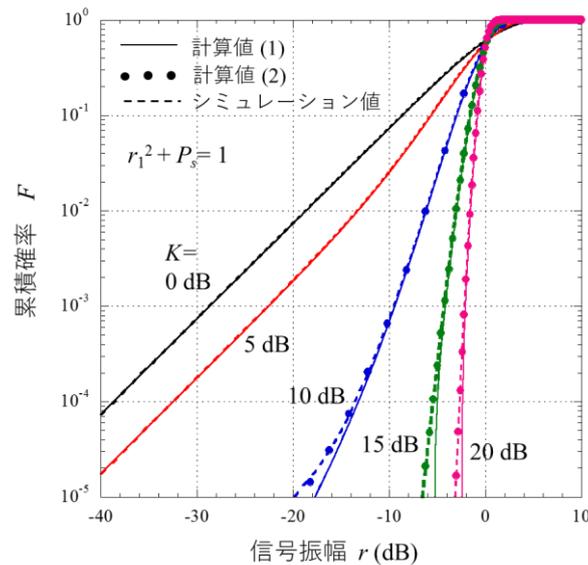


図 A3 仲上・ライス分布環境での振幅の累積確率分布：積分の数値計算値 vs. シミュレーション値
(計算値は分布の公式(17)を用いず、特性関数の積分式で計算)

- [3] Y. Karasawa, "A multistate channel model composed of line-of-sight and semi-line-of-sight propagation environments for millimeter-wave mobile radio systems," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 69, no. 12, pp. 8731 – 8743, 2021.
- [4] 今井哲朗, 電波伝搬解析のためのレイトレーシング法, コロナ社, 2016.
- [5] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [6] 仲上稔, "位相ならびに振幅が不規則に変化する多数の振動の合成振幅に関する研究,"電気通信学会誌, no. 202, 1940.01.
- [7] 奥井重彦, 特殊関数とその応用, 森北出版, 1997.
- [8] 森口繁一他, 数学公式 II, 岩波書店, 1957/1992.
- [9] 森口繁一他, 数学公式 III, 岩波書店, 1960/1993.
- [10] 唐沢好男, "電波伝搬：物理現象とモデリング -先達の足跡をたどる-, 信学誌, vol. 99, no. 8, pp. 792-798, 2016. https://www.journal.ieice.org/bin/pdf_link.php?fname=k99_8_792&lang=J&year=2016
- [11] 世戸憲治, 中西襄, "半無限弾性棒の弾丸衝突問題に基づく Fourier 変換の拡張," 数学・物理通信, vol. 3, no. 2, 2013.03.

読者の皆様へ

本内容を整理して取り入れ、かつ、仲上三分布 (n, q, m 分布) に注力してまとめた Open Access Book 「電波伝搬モデルの確率分布」を公開しています。

目次のページは[こちら](#)