

高分解能到来方向推定の仕組み [Part II]

コヒーレント波が入射する場合の F/B 型空間平均法

唐沢好男

前レポート YK-049 [1]では、信号源が異なる電波のアレーアンテナ受信信号からそれらの到来方向を高精度に求める方法として、信号処理の傑作と言われる二つの方法：MUSIC 法[2]と ESPRIT 法[3]の基本原則を解説した。これらの手法においては、信号源が相互に無相関成分（インコヒーレント成分）を含むことが条件になっていて、一つの信号源がマルチパスになって到来する環境、すなわち、コヒーレント波の入射に対しては、そのままでは適用することができない。本レポートでは、この環境にも適用可能とする前処理の方法「空間平均法」を解説する。最初に、一般的な空間平均法（Forward 型）[4]を述べ、後半では、精度の向上や必要アンテナ数を少なくすることができる Forward/Backward 型（F/B 型）の空間平均法[5],[6]を述べる。

アレーアンテナの受信信号を統計的処理することによって得られる相関行列は送信点と受信点を結ぶ通信路の情報（=財宝）が眠る山であり、いかにそれを掘り出すかが腕の見せ所になる。F/B 型の空間平均法にその真髄をみてほしい。

1. コヒーレント波の入射に対する到来方向推定の問題点

前レポート[1]で解説した到来方向高分解推定法（MUSIC 法と ESPRIT 法）の続きである。前レポートでは、図 1 に示すように、 L 個の独立な送信源（完全な無相関信号でなくてもよい）からの電波がそれぞれ異なる角度 θ ($l=1, 2, \dots, L$) で入射している場合、素子数 $L+1$ の等間隔直線状アレーアンテナ（uniform linear array: ULA）により、高分解能推定が可能であることを述べた。

本レポートでは、図 2 に示す到来波の全てが同一波源からなるコヒーレント信号の場合を取り扱う。無線通信におけるマルチパス環境（ただし遅延の差は無視できる）が一つの例である。

1. 1 信号源が独立な場合（前レポートのおさらい）

コヒーレント信号の場合の問題点を知るために、前稿で取り上げた図 1 の無相関信号の場合をおさらいする。

受信信号

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{n}(t) \tag{1}$$

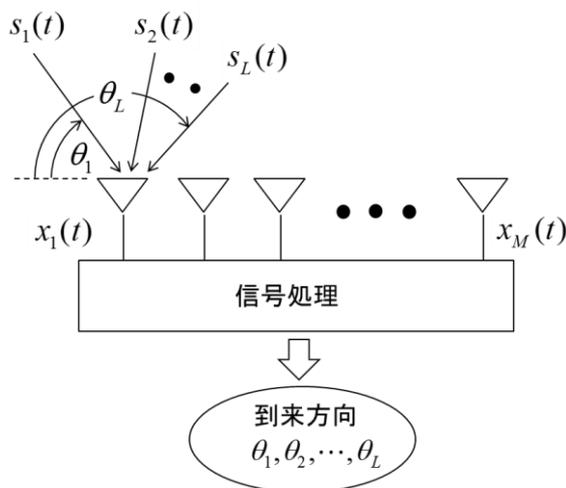


図1 独立な送信源からの電波の到来方向の推定 (必要なアレー素子数と到来波数の関係は $M \geq L+1$ [1])

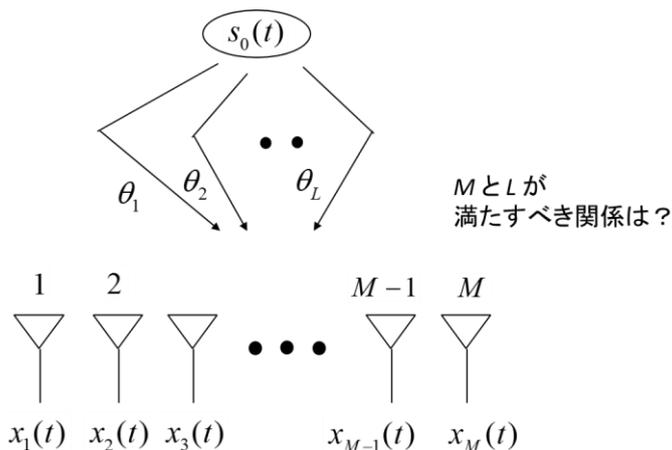


図2 到来波が同一波源からなるコヒーレント信号の場合 (M と L が満たすべき関係は)

受信信号ベクトル : $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_M)^T$

信号源ベクトル : $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_L)^T$

雑音ベクトル : $\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_M)^T$

方向行列 : $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_L)$

方向ベクトル (スティアリングベクトル) :

$$\mathbf{a}_l = \left(e^{j\phi(\theta_l, d_1)} \quad e^{j\phi(\theta_l, d_2)} \quad \dots \quad e^{j\phi(\theta_l, d_M)} \right)^T$$

素子間隔 Δd の直線状アレー (ULA) の場合

$$\phi(\theta, d) = -kd \cos \theta \rightarrow \phi(\theta_l, d_m) = -k(m-1)\Delta d \cos \theta_l$$

$$\text{雑音電力} : \langle |n_i|^2 \rangle = P_N, \quad \langle n_i n_{i'}^* \rangle = 0 \quad (i, i' = 1, 2, \dots, M; i \neq i')$$

$$\text{信号源電力} : \langle |s_l|^2 \rangle = P_{S_l}, \quad \langle s_l s_{l'}^* \rangle = 0 \quad (l, l' = 1, 2, \dots, L; l \neq l')$$

(ここでは、無相関としているが、一部に独立な信号が含まれていればよい、すなわち、完全相関以外の有相関であってよい)。

相関行列

相関行列は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= \langle \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \rangle = \langle (\mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)) (\mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t))^H \rangle \\ &= \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^H + P_N \mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}(P_{S_1} \quad P_{S_2} \quad \dots \quad P_{S_L}) \quad (\text{信号源間無相関の場合})$$

固有値と固有ベクトル

エルミート行列である相関行列は、固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, M$)と対応する固有ベクトル \mathbf{e}_i により、以下のように分解できる。

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H \quad (4)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_M)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L > \lambda_{L+1} = \dots = \lambda_M$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_M)$$

相関行列を信号成分と雑音成分に分解すると

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{mm} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \quad (5a)$$

$$\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H = \sum_{i=1}^L \lambda_{s_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H, \quad \mathbf{R}_{nn} = P_N \mathbf{I}_M \quad (5b)$$

雑音がない場合 ($P_N=0$) の固有値は

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{s_i} & (1 \leq i \leq L) \\ 0 & (L+1 \leq i \leq M) \end{cases} \quad (6a)$$

雑音を含めた固有値は

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{s_i} + P_N & (1 \leq i \leq L) \\ P_N & (L+1 \leq i \leq M) \end{cases} \quad (6b)$$

式(6)から分かるように固有値の次元 (単位) は電力であり、物理量としては平均受信電力である。固有ベクトルはこの受信電力を得るためのアレー合成ウェイトに対応する。

信号部分空間と雑音部分空間

信号部分空間 \mathbf{E}_S : 固有ベクトル $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_L$ の L 個のベクトルで張る空間

雑音部分空間 \mathbf{E}_N : 固有ベクトル $\mathbf{e}_{L+1} \sim \mathbf{e}_M$ の $M-L$ 個のベクトルで張る空間

$$\mathbf{E}_S = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_L) \quad (7a)$$

$$\mathbf{E}_N = (\mathbf{e}_{L+1} \quad \mathbf{e}_{L+2} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M) \quad (7b)$$

方向行列 \mathbf{A} は信号部分空間にあり、構成要素である方向ベクトル \mathbf{a}_l ($l=1, 2, \dots, L$) は固有ベクトル $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_L$ の線形結合で表される。

前稿で解説したように、MUSIC 法は雑音部分空間にある固有ベクトルで構成される \mathbf{E}_N を、ESPRIT は信号部分空間にある \mathbf{E}_S を用いて到来方向の推定を行う。

1. 2 信号源がコヒーレントの場合

次に、本題である図2で示したコヒーレント信号に対する相関行列の性質を見てゆきたい。

違いのものは信号源ベクトルにあり、以下で表される。

信号源ベクトル

$$\mathbf{s}_0(t) = (g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_L)^T s_0(t) \quad \left(\langle |s_0(t)|^2 \rangle = 1 \right) \quad (g_l \text{ はパス } l \text{ の利得}) \quad (8)$$

受信信号ベクトル

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}_0(t) + \mathbf{n}(t) \quad (9)$$

相関行列

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \rangle = \mathbf{A}\mathbf{S}_0\mathbf{A}^H + P_N\mathbf{I}_M \quad (10a)$$

$$\mathbf{S}_0 = \langle \mathbf{s}_0\mathbf{s}_0^H \rangle = \begin{pmatrix} |g_1|^2 & g_1g_2^* & \cdots & g_1g_L^* \\ g_2g_1^* & |g_2|^2 & \cdots & g_2g_L^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_Lg_1^* & g_Lg_2^* & \cdots & |g_L|^2 \end{pmatrix} \quad (10b)$$

任意の値 $g_1 \sim g_L$ を与えて、行列 \mathbf{S}_0 の固有値を求めてみると分かるように、(10b)式の中辺で与えられる形の行列はランクが 1 で、それが積の形で構成される相関行列の信号部分空間の固有値の数は一つしかないことになる。

雑音がない場合 ($P_N=0$) の固有値は

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{s1} & (i=1) \\ 0 & (2 \leq i \leq M) \end{cases}$$

雑音を含めた固有値は

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{s1} + P_N & (i=1) \\ P_N & (2 \leq i \leq M) \end{cases}$$

信号部分空間と雑音部分空間

信号部分空間 \mathbf{E}_S : 固有ベクトル \mathbf{e}_1 の一つのベクトルで張る空間

雑音部分空間 \mathbf{E}_N : 固有ベクトル $\mathbf{e}_2 \sim \mathbf{e}_M$ の $M-1$ 個のベクトルで張る空間

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{e}_1 \quad (11a)$$

$$\mathbf{E}_N = (\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_M) \quad (11b)$$

MUSIC 法や ESPRIT を適用するためには、相関行列の信号部分空間のランクが到来波数 L でなければならず、いかにしてランクを回復するかが鍵になる。

2. コヒーレント信号をインコヒーレント信号に変えるには

図 3 に示すように、3つのコヒーレント波 ($L=3$) を 4素子のアレーアンテナ ($M=4$) で受信する場合で、熱雑音を除いて考える。アレーが一点に止まっている場合、出力信号はどれも

$$x_i(t) = \alpha_i(g_1, g_2, g_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)s_0(t) \quad (i=1 \sim 4) \quad (v=0)$$

の形であり、 α_i は時間に対して固定値、変動するものは s_0 である。ゆえに $x_2(t) = (\alpha_2/\alpha_1)x_1(t)$ と書け、二つの信号は線形関係 (すなわち従属関係) にある。信号間の全ての組み合わせでこの線

形関係が成立し、ゆえに、 $x_1(t) \sim x_4(t)$ はお互いに完全相関、すなわちコヒーレントである。信号成分に対する相関行列がランク 1 になるのはこの意味である。では、到来方向の関係を維持したまま変動を無相関にする、すなわち相関行列のランクを波数 L に上げるにはどうしたらよいであろうか。

そのためには、図 3 に示したように、アレーアンテナを空間移動させるのである。このようにすると、アレー出力に送信信号 s_0 の時間変動とは別に、空間移動による変動が現われる。

$$x_i(t) = \alpha_i(t)s_0(t) \quad (i = 1 \sim 4) \quad (12)$$

$$\alpha_i(t) = \alpha_0(t + (i-1)v\Delta d)$$

$$\alpha_0(t) = \alpha_1(t; g_1, g_2, g_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

この変動は 3 つの到来波の空間移動による位相変化の結果として現れ、図 3 の下部に描いたようなイメージ（実際は複素数量であり、あくまで概念的な図）になる。 $\alpha_0(t)$ は基準アンテナ（ここではアンテナ 1）での受信信号の時間変動、他のアンテナは時間 $\Delta d/v$ ずつずれて同じ変動をする。（4 両編成の電車の各号車に 4 人が分かれて乗って、それぞれに窓から見える景色が時間ずれていることと同じ）。これを同時刻で見ると、受信信号 x_1 と x_2 は異なる変化になり、お互い独立である。 x_3 も x_1, x_2 に対して独立である。しかしながら、4 つの信号のうちどれか一つは、残りの 3 つの信号の線形結合で表される。（電車の例ではそうはならない、なぜか？）。ゆえに、この 4 つの信号の相関行列（信号部分空間）のランクは 3 である。ここでは、コヒーレント波の数を 3 にしたのでそうなるが、 $L=1,2,3,4$ に対しては、ランクは L になる。また、 L が 5 以上では、アレー素子数が 4 であるので、この制約によってランクは 4 である。

このようにアレーを空間移動することによって相関行列のランクを上げる方法は空間平均法と呼ばれる。素子数 $M (\geq L+1)$ のアレーの空間移動によって、ランク L の相関行列を手に入れることができ、前レポートで解析した MUSIC 法や ESPRIT 法による解析の準備ができたことになる。

現実のマルチパス環境において、アレーアンテナを移動しながら測定するのは実施上の困難が大きいため、実際には、図 4 に示すような素子数 M のアレーアンテナ (ULA) の中に素子数 $K (\geq L+1)$ のサブアレーを作り、これを素子単位で順次シフトする構成がとられる。アレー素子数 M 、サブアレー素子数 K 、サブアレーの数 N と波数 L の間には以下の関係を満たす必要がある。

- 1) $K \geq L+1$
- 2) $N = M - K + 1 \geq L$
- 3) 1)、2) より $M (= N + K - 1) \geq 2L$

これより、空間平均方式において、アレー素子数 M は波数 L の 2 倍以上（最小条件で $2L$ ）が必要ということになる。【後に学ぶ F/B 法では $(3/2)L$ まで緩和される】

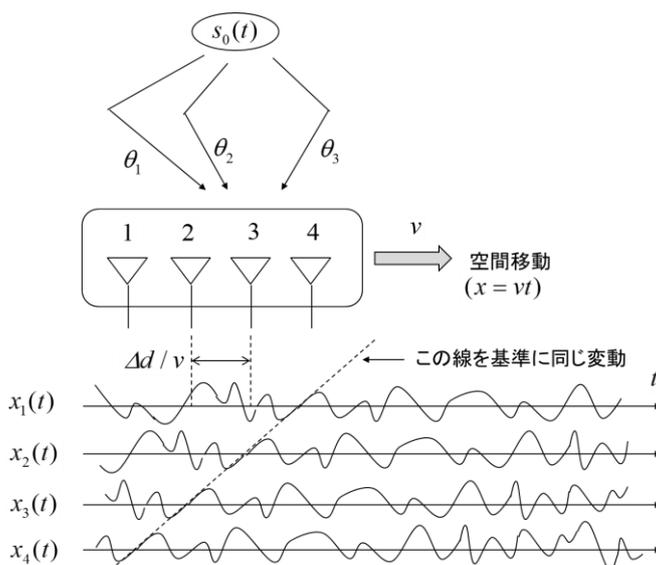


図3 コヒーレント信号の移動受信 ($L=3, M=4$) (x_i の変動はイメージ図)

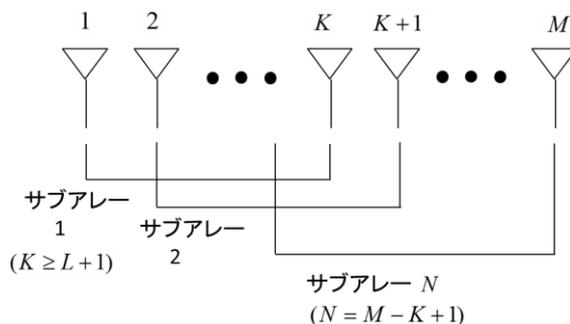
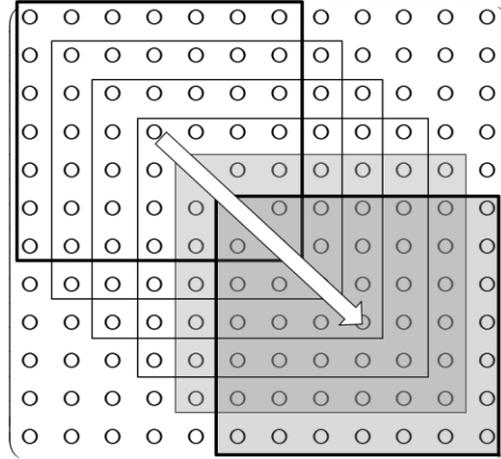


図4 線形等間隔アレー (ULA) を用いた空間平均

3. 相関行列の空間平均 (Forward 型空間平均)

図4で示したアレー構成で説明する。それぞれのサブアレーでは空間的な動きがないので、相関行列のランクは1である。一つずれたサブアレーの相関行列もランクは1であるが、その二つを重ねると空間的な変動が加わるので、ランクは2になる。このような相関行列を重ねて行くたびにランクは上がるが、上限は、到来波数の L までである。図5は $M=12$ のアレーの相関行列を $K=7$ のサブアレーに分け、そのサブアレーを $N=6$ 個作り、これらの重ね合わせを行うイメージである。

サブアレー1の受信を基準に考える。式(8)の $\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{n}$ に対して、サブアレー1であることの番号1を付す。このとき、受信信号ベクトルと相関行列は以下である。

図5 アレー全体の相関行列とサブアレー毎の部分相関行列 ($M=12, K=7, N=6$ の例)

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{s}_0(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_{xx,1} = \langle \mathbf{x}_1(t) \mathbf{x}_1^H(t) \rangle = \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_0 \mathbf{A}_1^H + P_N \mathbf{I}_M$$

以降、信号部分空間のみの相関行列に着目するため、熱雑音部分を省いて考える。

$$\mathbf{R}_{xx,1}^{(S)} = \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_0 \mathbf{A}_1^H \quad (14)$$

サブアレー 2 では、ESPRIT のとき学んだように ([1]の(12)式)、 \mathbf{A}_2 は位相回転行列を掛けて $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \Phi$ で表されるので、相関行列は次式である。

$$\mathbf{R}_{xx,2}^{(S)} = \mathbf{A}_2 \mathbf{S}_0 \mathbf{A}_2^H = \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{S}_0 \Phi^H \mathbf{A}_1 \quad (15)$$

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} e^{j\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\phi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j\phi_L} \end{pmatrix} \quad (\phi_i = -k \Delta d \cos \theta_i)$$

N 個のサブアレーを重ねてできる $K \times K$ の行列の信号部分空間の相関行列は

$$\mathbf{R}_{xx}^{(S)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_{xx,i}^{(S)} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_1 \left[\sum_{i=1}^N \Phi^{(i-1)} \mathbf{S}_0 (\Phi^{(i-1)})^H \right] \mathbf{A}_1^H \quad (16)$$

である。サブアレーを一つ重ねる毎に信号部分空間の行列のランクも一つ上がり、上限の到来波数 L で止まる。このようにして得られた相関行列 (雑音も含めた) を用いることにより、[1] で解説した MUSIC 法や ESPRIT 法が適用できる。

以下一例を示す (前レポートの例と同じ)。到来角度① 50° , ② 120° , ③ 130° からコヒーレン

ト波が入射する。信号は±1の乱数系列で、それぞれの振幅を1 (0dB), 2 (6dB), 4 (12dB)とする。素子ごとの平均雑音電力 P_N は-10 dBとする。SN比に換算すると、上記の3波は、10dB, 16dB, 22dBである。スナップショット数(データ長)は100。受信アレーは直線状に半波長間隔に配置されたULA。サブアレーの大きさは、全てのケースに共通で6素子アレー ($K=6$)とし、サブアレーの数(=重ね合わせの数) N を1~4(すなわち $M=6\sim 9$)で調べる。到来方向推定にはMUSIC法を適用する。

図6はコヒーレント波入射に対するサブアレーの数 N と固有値の関係 ($L=3, K=6$)を示している。固有値の値0.1が雑音電力レベルである。 $N=1$ では、雑音より十分大きい固有値が一つ、 $N=2$ では二つ、 $N=3$ と4では、到来波数 L に相当する三つである。原理的に、三つの固有値が卓越しないケース ($N=1$ と2)では推定ができないことになる。図7は、 $N=1\sim 4$ に対するMUSICスペクトルを示している。図より、予想通り、 $N=3$ と4で推定がうまくできていることがわかる。今回の比較では $N=4$ の方が、アンテナ数 M と重ね合わせ数 N が大きく、故に、精度も当然、 $N=3$ よりよくなっている。(このことは、図6の固有値分布において、 $N=4$ が第3固有値を一番大きくしており、低相関化効果が一番大きく出ていることでもわかる。)

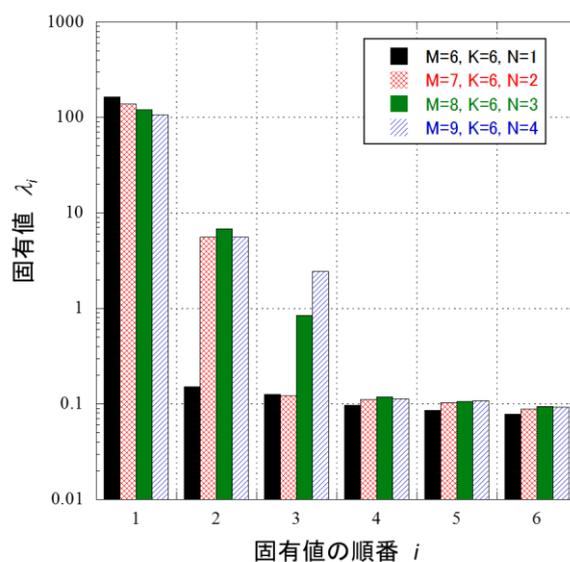


図6 コヒーレント波に対する重ね合わせ数 (N) と固有値の関係 ($L=3, K=6$)

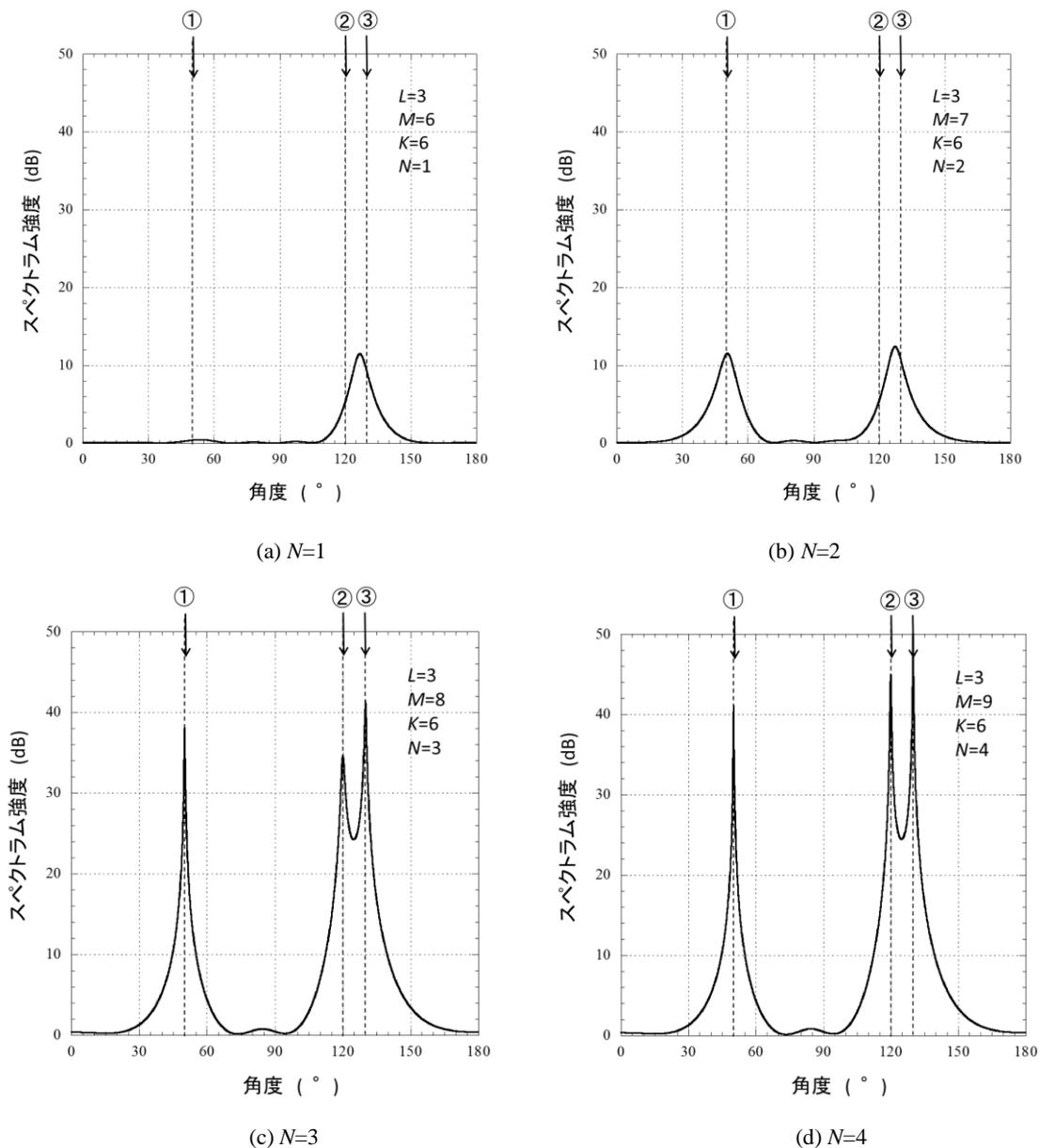


図7 コヒーレント波入射に対する空間平均後の MUSIC スペクトラム ($L=3, K=6$)

4. さらに相関抑圧機能をもつ Forward/Backward 型の空間平均法

コヒーレント波入射では、相関行列のランクが 1 になってしまっていて、信号部分空間の固有ベクトルを正しく求められない。それゆえ、このままでは、固有ベクトルを用いた到来方向推定がうまく行かない。その対策とし、空間平均と呼ばれる前処理を行うことによって相関行列のランクを波数 L まで上げる方法について述べてきた。相関行列は宝物が埋まった山であり、空間平均と言う仕掛けを施して目的の宝物を掘り出したわけである。では、この掘り出し方がベストな方法なのだろうか？もっとよい掘り出し方があるのではないかと興味を湧くであろう。以下で解説する Forward/Backward 型 (F/B 型) 空間平均法[5],[6]がその答えを教えてくれる。これ

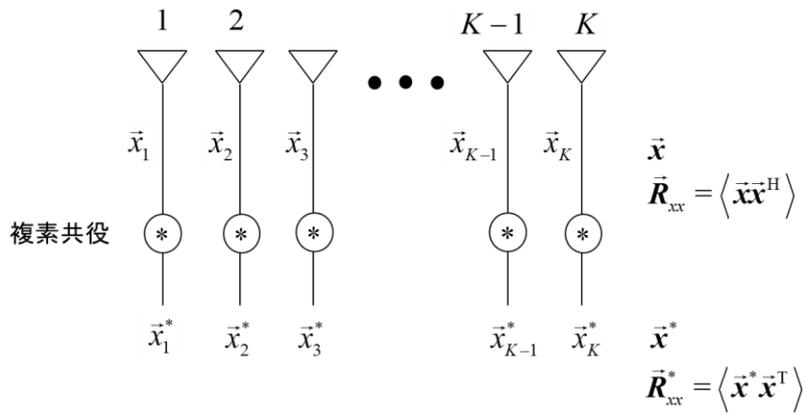
がどのようなものかを説明する。ちなみに3節で述べた空間平均は Forward 型空間平均である。

一つのサブアレーについて考える。また、信号部分空間にある固有値のみに着目する (= 雑音は無視する)。図8の(a)と(b)に示す2種類の複素共役信号を考える。一つは、受信信号ベクトル $\mathbf{x}(t)$ をそのまま複素共役にしたもの、もう一つは、さらにアンテナの順番を反対にして空間的な入替をしたものである。(a)を順方向と言う意味で記号に矢印を付し $\vec{\mathbf{x}}$ 、 $\vec{\mathbf{x}}^*$ と記す。(b)は逆方向なので $\overleftarrow{\mathbf{x}}$ と記す。すなわち

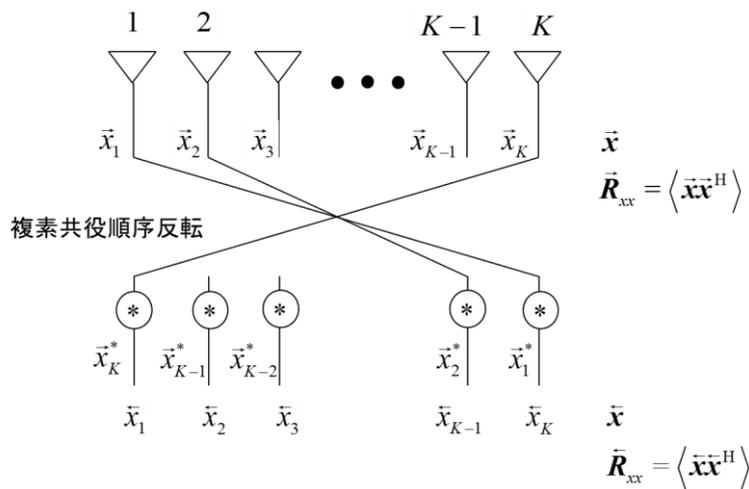
$$\vec{\mathbf{x}}(t) \equiv (\vec{x}_1(t) \quad \vec{x}_2(t) \quad \cdots \quad \vec{x}_K(t))^T$$

$$\vec{\mathbf{x}}^*(t) = (\vec{\mathbf{x}}(t))^*$$

$$\overleftarrow{\mathbf{x}}(t) \equiv (\overleftarrow{x}_1(t) \quad \overleftarrow{x}_2(t) \quad \cdots \quad \overleftarrow{x}_K(t))^T = (\overleftarrow{x}_K^*(t) \quad \overleftarrow{x}_{K-1}^*(t) \quad \cdots \quad \overleftarrow{x}_1^*(t))^T$$



(a) 受信信号とその複素共役信号



(b) 受信信号とその複素共役順序反転信号

図8 利用したい信号を探す

コヒーレント波が入射する場合、 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ の要素は、お互いに線形関係で結ばれ、故に相関行列 $\vec{\mathbf{R}}_{xx} (= \langle \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}^H \rangle)$ のランクは 1 である。 $\vec{\mathbf{x}}^*(t)$ も同様に相関行列 $\vec{\mathbf{R}}_{xx}^* (= \langle \vec{\mathbf{x}}^*\vec{\mathbf{x}}^{*T} \rangle)$ のランクも 1 である。しかしながら、複素共役にすることによって、到来角度の情報は θ から $-\theta$ に変わるので、例えば、 $\vec{\mathbf{x}}_1(t)$ と $\vec{\mathbf{x}}_2(t)$ の関係と、 $\vec{\mathbf{x}}_1^*(t)$ と $\vec{\mathbf{x}}_2^*(t)$ の関係は異なったものになる。ゆえに、二つの相関行列を足したもの ($\vec{\mathbf{R}}_{xx} + \vec{\mathbf{R}}_{xx}^*$) はランクが 2 になる。ランクが上がったこと、すなわち、コヒーレントな信号をインコヒーレントな信号に近づけたことはありがたいが、角度情報が共有されていない (一方は θ 、もう一方は $-\theta$) ので、そのまま足し合わせてはいけないのである。では、どうすればよいか、そう、角度関係が反転するようアンテナの順序も反転させればよいと言うことになる。図 8(b)の操作である。この場合は、 $\vec{\mathbf{R}}_{xx}$ と $\vec{\mathbf{R}}_{xx}^* (= \langle \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}^H \rangle)$ は到来角度関係でも対等であり、かつ、足してランクが 2 になることは変わりがないので、このようにして、サブアレー毎の相関行列 $\vec{\mathbf{R}}_{xx,i}$ が得られる。

$$\vec{\mathbf{R}}_{xx,i} = \frac{\vec{\mathbf{R}}_{xx,i} + \vec{\mathbf{R}}_{xx,i}^*}{2} \quad (17)$$

到来方向推定に用いる相関行列は、全サブアレーについて重ね合わせればよく、

$$\vec{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{R}}_{xx,i} \quad (18)$$

である。このようにして行う空間平均は、Forward/Backward (F/B) 型空間平均と呼ばれる。F/B 空間平均により素子間相関の抑圧効果が高まり、前節で述べた順方向 (F 型) の空間平均の相関行列 $\vec{\mathbf{R}}_{xx}$ に比べて、少ない本数のサブアレーで、そしてその結果として、少ない数のアレーで方向推定が可能になる。その算定は、

- 1) サブアレーの素子数条件 : $K \geq L+1$
- 2) サブアレー数条件 : $2N \geq L$ (上限 L の中で、 N が 1 上がる毎にランクが 2 上がるため)
- 3) アレー素子数条件 : $M = K+N-1 \geq (3/2)L$

このように、前節で説明した Forward 型の空間平均では、必要なアレー素子数 M が到来波数の 2 倍必要であることに比べて、F/B 型の空間平均では 1.5 倍でよいことになり、F/B 型のメリットが大きいことが分かる。

ここでは、直感的なイメージで理解できるような説明を試みたが、数式での詳細な解析は、原著論文[5],[6]や解説文献[7],[8]で学んで欲しい。

論より証拠、前節と同じ例 (到来角度① 50° , ② 120° , ③ 130° からのコヒーレント波が入射) について、F/B 型空間平均法を適用する。サブアレーのサイズは、全てのケースに共通で 6 素子アレー ($K=6$) とし、サブアレーの数 (=重ね合わせの数) N を 1~4 (すなわち $M=6\sim 9$) で調べる。到来方向推定には MUSIC 法を適用する。

図9はコヒーレント波入射に対するF/B型空間平均法での、重ねあわせ数(N)と固有値の関係($L=3, K=6$ は共通)を示している。 $N=1$ では、雑音レベル(固有値の値0.1)より十分大きい固有値が二つ、 $N=2\sim 4$ では、到来波数 L に相当する三つである。原理的に、三つの固有値が卓越しないケース($N=1$)では推定ができないことになる。F型のみ空間平均では N が3以上で推定可能になるが、F/B型では、 $N=2$ で可能になる。図10は、 $N=1\sim 3$ に対するMUSICスペクトルを示している。図より、予想通り、 $N\geq 2$ で推定がうまくできていることがわかる。

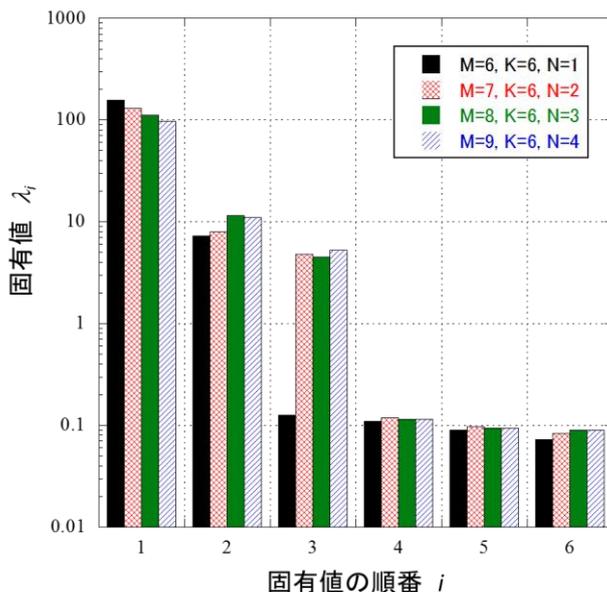
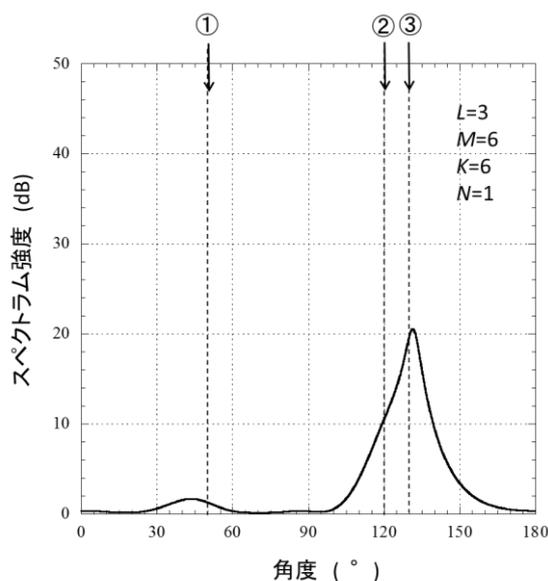


図9 F/B型空間平均法での固有値分布特性 ($L=3, K=6$)



(a) $M=6, N=1$

図10 F/B型での推定例 ($L=3, K=6$)

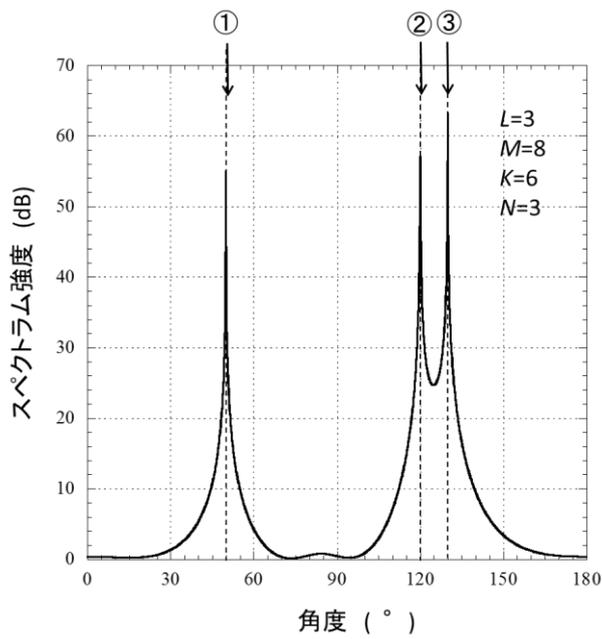
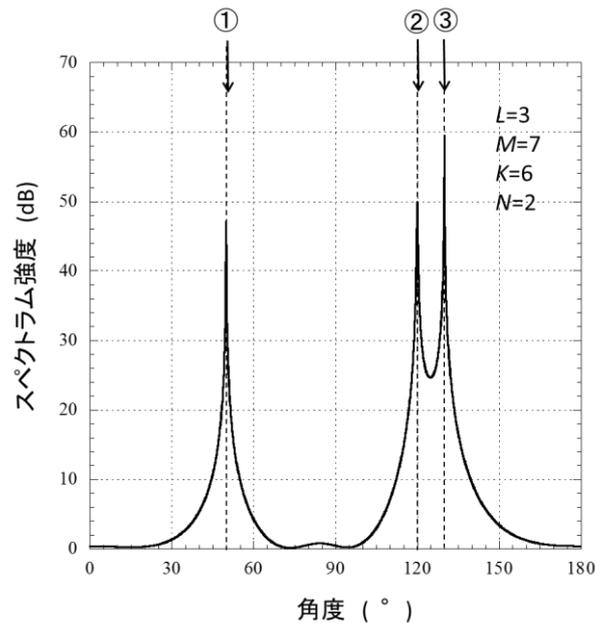


図 1 0 F/B 型での推定例 ($L=3, K=6$) (続き)

本レポートでの推奨法

F/B 型空間平均法について、図 8 で説明したように、サブアレー別に相関行列を作り、その空間平均法を述べた。ここでは、結果として同じことになるアレー全体の相関行列を先に作る方法をまとめ、これをコヒーレント波に対する到来方向推定の推奨法としたい。手順をまとめると以下である。

- 1) アレー素子数 M を決める。到来波数 L に対して、 $M \geq (3/2)L$ のアレーとする。精度よい測定を行いたい場合には、アレー素子数 M にはある程度の余裕があったほうがよい。(コヒーレント波の到来波数 L を把握するには、空間平均法を取り入れた相関行列の固有値分布から推定しなければならず、それが先になるが、ここでは、それはできたこととしてスタートする。)
- 2) アレー全体に対して F 型の相関行列 \vec{R}_{xx} を求める
- 3) backward 型 (B 型) の相関行列 \bar{R}_{xx} を \vec{R}_{xx} から変換して求める

$$\bar{R}_{xx} = J \vec{R}_{xx}^* J \quad (19)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (M \times M \text{ の行列})$$

(J を左から掛けると行が反転、右から掛けると列が反転)

- 4) FB 型相関行列を求める

$$\ddot{R}_{xx} = \frac{\vec{R}_{xx} + \bar{R}_{xx}}{2} \quad (20)$$

(式(17)との違いは、式(17)はサブアレー毎に作っている。ここでは、アレー全体の相関行列を作っている)

- 4) $K (>L+1)$ 、かつ、条件 1) と合わせて、適当な K, N を定める。

以下このステップに従った例を示す。電波到来環境は、前述の例と同じで 3 波。アレー素子数を $M=6$ (素子間隔半波長の ULA) とする。4) の条件より、この場合は、 $K=4, N=3$ (Case 2) と $K=5, N=2$ (Case 3) の二つを選ぶことができる。比較のため、F 型の空間平均法も調べるが、この場合は、 $K=4, N=3$ (Case 1) のみである。以下、この三つのケースに対して到来方向推定の結果 (一例である) を示す。

図 1 1 は固有値の分布である。第 3 固有値 (信号部分空間の最小固有値) と第 4 固有値 (雑音部分空間の最大値) の差が大きいほうが、相関抑圧が良く働いていると言える。その意味では、F 型の Case 1 では差が小さく、F/B 型の Case 2 と Case 3 では良好であることがわかる。図 1 2

は3つのケースに対する MUSIC スペクトラムを示している。固有値分布から推測ができるように F 型の Case 1 では、推定がぎりぎり可能と言える状態である（この図は一例であり、試行を繰り返すと②のピークが埋もれてしまうことも稀に発生した）。

この結果からも明かなように、コヒーレント波の到来における空間平均は F/B 型が優れていることが分かり、本レポートとしてはこれを推奨法としたい。なお、尚、完全に独立な信号に対しては、F 型と B 型では同性能で働き、かつ F/B 型にしても結果に影響はなく、F 型空間相関行列を用いることで、なんら問題は無い。

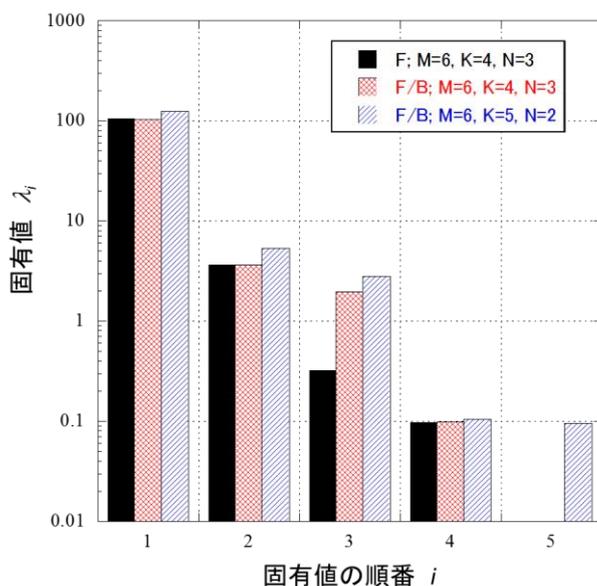
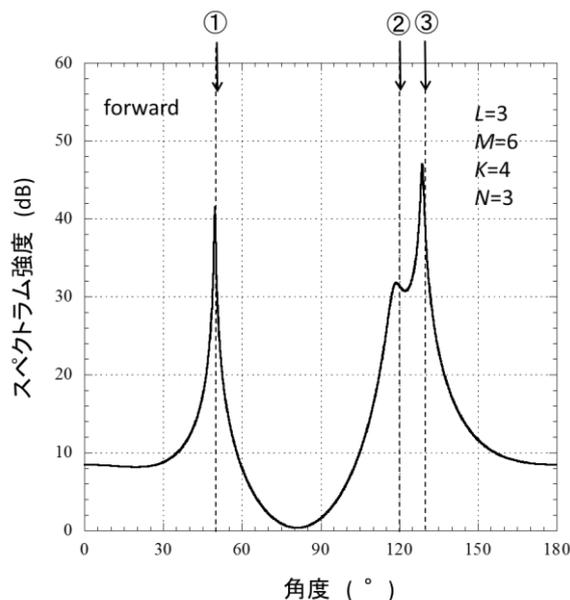
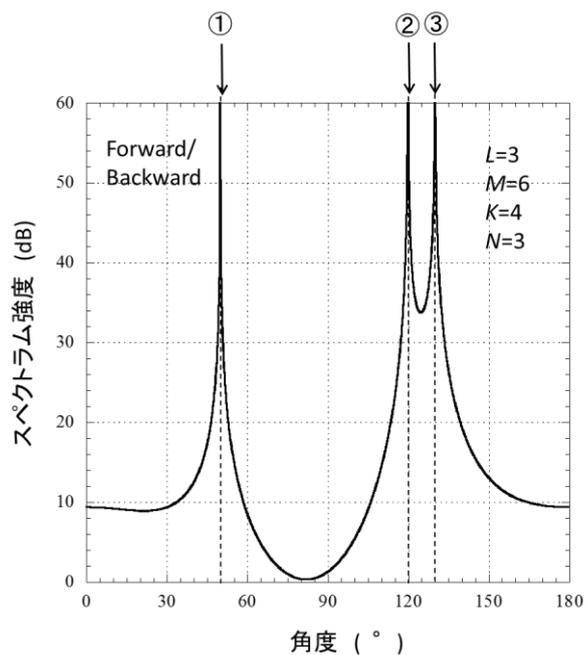


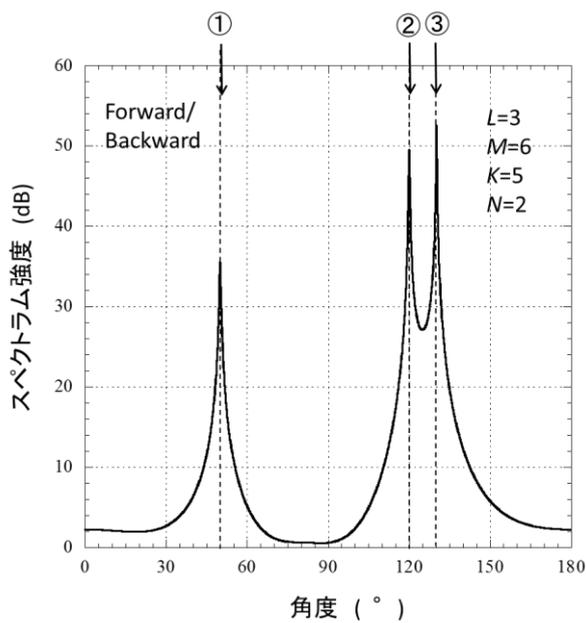
図 1 1 F/B 型空間平均法での固有値分布特性 ($L=3, M=6$)



(a) Case 1 (F 型 : $K=4, N=3$)



(b) Case 2 (F/B 型 : $K=4, N=3$)



(c) Case 3 (F/B 型 : $K=5, N=2$)

図 1 2 $L=3, M=6$ としたときの F 型と F/B 型での推定例

参考文献

- [1] 唐沢好男, “高分解能到来方向推定の仕組み：これでわかるMUSIC法とESPRIT法,” 私報 : TR-YK-049, 2020. 07, http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_049_DOA_Estimation.pdf
- [2] R.O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol. AP-34, no. 3, pp. 276-280, 1986.
- [3] R. Roy and T. Kailath, “ESPRIT- Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,” IEEE Trans. Accous., Speech, Signal Proc., vol. 37, no.7, pp. 984-995, 1989.
- [4] T-J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, “On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals,” IEEE Trans. ASSP, vol. ASSP-33, no. 4, pp. 806-811, Aug. 1985.
- [5] R. T. Williams, S. Prasad, A. K. Mahalanabis, and L. H. Sibul, “An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment,” IEEE Trans. ASSP, vol. 36, no. 4, pp. 425-432, 1988.
- [6] S. U. Pillai, and B. H. Kwon, “Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification,” IEEE Trans. ASSP., vol. 37, no.1, pp. 8-15, 1989.
- [7] 菊間信良, アレーアンテナによる適応信号処理, 科学技術出版, 1998.
- [8] 山田寛樹, 高分解到来波推定の基礎と実際, 信学会, AP研, アンテナ・伝搬における設計・解析ワークショップ, No. 33, pp. 1-133, 2006.10.