Technical Report YK-052
Oct. 10, 2020
Y. Karasawa

Fast Fading 環境におけるビット誤り率
～その推定式の原点を訪ねる～

唐沢好男

無線伝送においてディジタル信号が誤る主な要因は、図１にまとめた以下の４点である。

① 電波が弱い：信号が雑音に負ける

② 信号の時間変化が速い：高速移動体におけるドップラーシフトによる位相変動

③ 波形が歪む：マルチパス遅延による信号到達時間のばらつき

④ 混信する：同じ周波数帯利用の他局のシステムからの信号との干渉

①は距離が遠すぎるとか、伝搬路上の遮へいが大きすぎる等により、電波の受信強度が雑音レベルに近くなってしまった場合、④は、同じ周波数で運用される他局の干渉波が混入する場合で、誤り発生のイメージはつきやすい。一方、②と③は、伝搬路がマルチパス環境であることによって起こる誤りであり、信号強度を強くしても解決できない。ゆえに、これらの誤りは軽減困難な誤り（irreducible error）と呼ばれる。直感的イメージは、図２の視力検査に例えられる。

視力検査は、視力表にあるサイズの異なる C 型マーク（ランドルト環）の向きを指定距離から読みとる能力によって、視力が判定される。上下左右斜め８通りの向きであり、8PSK の復調作業である。そのとき、③は視力表の文字（マーク）そのものがぼけていて読めない状態である。一方、②は、視力表ははっきり見えるが、指し棒が揺れてどこを指しているか分からなくなる状態である。本資料では②の問題を取り上げる。

位相変動が問題になる伝搬現象は fast fading と呼ばれる。通信の教科書や専門書では、この fast fading に強い変復調方式である遅延検波 PSK 方式（DBPSK, DQPSK）に対して、ビット誤り率（BER）の計算式が以下のように示されている。

$$P_{e,BPSK} \approx \frac{1}{2}\left(\pi f_D T_s\right)^2 \tag{1a}$$

$$P_{e,DPSK} \approx \left(\pi f_D T_s\right)^2 \tag{1b}$$

ここで、T_s は変調信号のシンボル周期、f_D は最大ドプラー周波数（＝移動速度／波長）である。

しかし、この式がどのような手順によって得られたかについて、そこを丁寧にまとめている解説書がないと感じている。本レポートは、この解説を行う。原典は 1960 年の Voelcker 論文[1] であり、基本的なことはほぼこれに尽きている。原著論文を読み解き、筆者の理解しえたところによって若干組み立てなおし、より一般的な表現である次式[2]に至る道筋を示す。

$$P_{e,BPSK} \approx \left(\pi \sigma_f T_s\right)^2 \tag{2a}$$

$$P_{e,DPSK} \approx 2\left(\pi \sigma_f T_s\right)^2 \tag{2b}$$

ここで、σ_f はドップラースプレッド（ドップラー周波数変動の標準偏差）である。

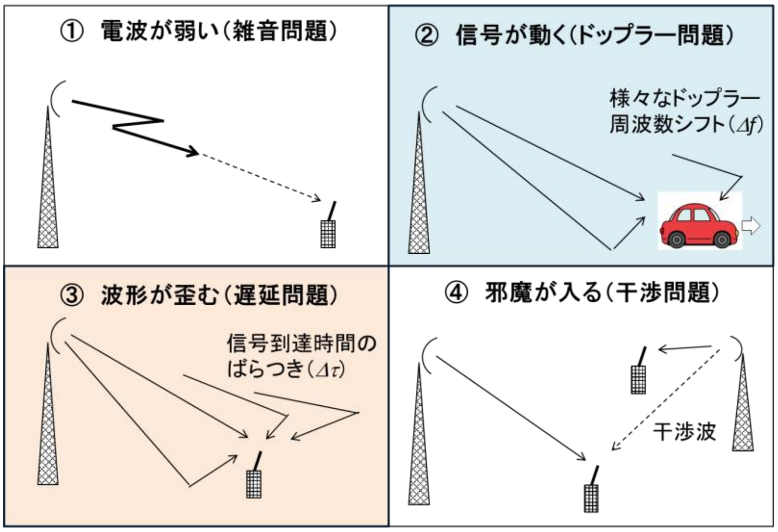

図１　伝送に誤り（ビットエラー）が起きる原因（本レポートは②が対象）

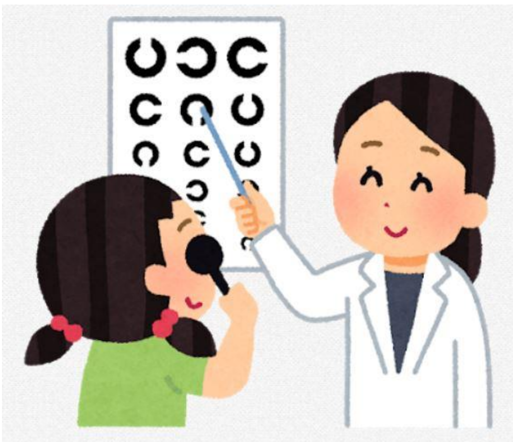

図２　誤りの発生を視力検査に例えると　（いらすとやフリー画像より）

１．レイリーフェージングの時間変動に関する統計的性質

誤り率の導出は２章および３章で行う。ここではその準備として、原因となるマルチパスフェージング（レイリーフェージング）の時間変動に関する統計的性質をまとめる[2]。

レイリー分布

狭帯域信号の受信信号 $u(t)$は、等価低域通過系（ベースバンド系）では次式で表される。

$$u(t) = a(t)s(t) + n(t) \tag{3}$$

ここで、$s(t)$は送信信号、$n(t)$は雑音であり、その平均電力を以下で設定する。

$$\left\langle \left|s(t)\right|^2 \right\rangle = 1,\ \ \left\langle \left|n(t)\right|^2 \right\rangle \equiv 2\sigma_n^2 = 1 \tag{4}$$

係数 a はマルチパスフェージングによって時間変動する複素利得であり、次式で表される。

$$a(t) \equiv x(t) + jy(t) = r(t)e^{j\phi(t)} \tag{5a}$$

$$\left\langle \left|x\right|^2 \right\rangle = \left\langle \left|y\right|^2 \right\rangle \equiv \sigma_s^2,\quad \left\langle r^2 \right\rangle = 2\sigma_s^2 \tag{5b}$$

変数 x, y は独立な正規分布 $N(0,\sigma_s^2)$、r は次式で与えられるレイリー分布になる。

$$p(r) = \frac{r}{2\sigma_s^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_s^2}\right) \tag{6}$$

相関係数

複素数で表される二つの量 a_0 と a_1 の関連性は次式の相関係数 ρ で表される。

$$\rho = \frac{\left\langle \left(a_0 - \langle a_0\rangle\right)^* \left(a_1 - \langle a_1\rangle\right) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \left|a_0\right|^2 \right\rangle \left\langle \left|a_1\right|^2 \right\rangle}} \tag{7a}$$

レイリーフェージングの場合は

$$\rho = \frac{\left\langle a_0^* a_1 \right\rangle}{2\sigma_s^2} \tag{7b}$$

であり、相関係数は一般的には複素数である。変数 x_0 と y_1、x_1 と y_0 のそれぞれの関係において無相関、あるいは$\langle x_0y_1\rangle=\langle x_1y_0\rangle$で与えられるときは、

$$\rho = \frac{\langle x_0 x_1 \rangle}{\sigma_s^2} = \frac{\langle y_0 y_1 \rangle}{\sigma_s^2} \tag{7c}$$

である。上記の関係は、例えば、a_0 と a_1 に定常的な位相回転があるような場合（＝位相量ϕに定常成分が加わっているような場合）には成り立たないが、ここで検討する範囲においては成立している。

このとき、変数 x_0 と x_1 の結合確率 $p(x_0, x_1;\rho)$は次式で与えられる。

$$p\left(x_0, x_1; \rho\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_0^2 - 2\rho x_0 x_1 + x_1^2}{2\left(1-\rho^2\right)\sigma_s^2} \right) \tag{8}$$

平均電力の到来角プロファイルと空間相関

伝送路特性の時間変動は、到来方向の異なる素波で構成されるマルチパス環境を端末が移動することによって発生する。このため、到来波の角度プロファイルが重要である。微小角度 $d\theta$ 内に到来する平均電力を$\Omega(\theta)d\theta$で表すとき、Ω は平均電力角度プロファイル（あるいは角度スペクトル）と呼ばれる。なお、角度プロファイルはパスの到来電力密度とアンテナ利得の積であるが、ここではそれをまとめてΩで表している。

水平面上にパスが広がるフェージング環境において、端末がある位置 d と角度θ=0 方向に微小距離Δd だけ離れた d+Δd の２点間の相関係数はΩを用いて以下で表される。

$$\rho(\Delta d) = \frac{1}{2\sigma_s^2}\int_0^{2\pi} \Omega(\theta) e^{jk\Delta d \cos\theta} d\theta \quad \text{（}k\text{：電波の波数 (=}2\pi/\lambda, \lambda\text{：波長)）} \tag{9}$$

なお、ここで言う相関は、空間相関である。

水平面の全方向から一様に到来する場合には、次式である。

$$\Omega(\theta) = \frac{\sigma_s^2}{\pi} \tag{10}$$

$$\rho(\Delta d) = J_0(k\Delta d) \qquad \text{（}J_0\text{：0 次の第 1 種ベッセル関数）} \tag{11}$$

自己相関とパワースペクトル

マルチパス環境の中をθ=0 方向に速度 v で移動しながら受信すると、角度θ_i方向からの素波一つ一つに対して $f_D \cos\theta_i$ のドップラー周波数シフトを受ける。ここで f_D は v/λで与えられる最大ドップラー周波数である。このドップラー偏移が$\pm f_D$の範囲で広がりをもつため、振幅・位相の時間変動が起きる。マルチパス波によって、空間に振幅・位相の変化が生じ、この中を移動して受信するため、空間的変動が時間的変動に姿を変えたとも解釈できる。この解釈から、受信信号の自己相関特性は空間相関特性の空間軸 d を d=vt の関係によって、時間軸 t に置き換えたもの

になる。すなわち、空間相関に対して、$kd \rightarrow 2\pi f\Delta t$ とすれば自己相関になる。例えば、(10)式で与えられる到来角度一様の場合には、自己相関係数は次式である。

$$\rho(\Delta t) = J_0(2\pi f_D \Delta t) \qquad \text{（水平面内到来角一様）} \tag{12}$$

時間変動のパワースペクトル $S(f)$は Wiener-Khintchine の関係式により、自己相関特性のフーリエ変換で求められる。(注：ここでは、相関係数に平均電力を掛けたものを相関特性と呼んでいる)。すなわち、

$$S(f) = 2\sigma_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(|\Delta t|) e^{-j2\pi f \Delta t} d\Delta t \tag{13}$$

到来角度一様の場合には

$$S(f) = 2\sigma_s^2 \frac{1}{\pi f_D \sqrt{1-\left(f/f_D\right)^2}} \qquad \left(-f_D \le f \le f_D\right) \tag{14}$$

平均周波数 f_m とドップラースプレッドσ_f を以下の式で定義する。

$$f_m = \frac{1}{2\sigma_s^2} \int_{-f_D}^{f_D} f\, S(f) df \tag{15a}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{2\sigma_s^2} \int_{-f_D}^{f_D} \left(f - f_m\right)^2 S(f) df} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma_s^2} \int_{-f_D}^{f_D} f^2 S(f) df - f_m^2} \tag{15b}$$

到来角度一様の場合には

$$\sigma_f = f_D / \sqrt{2} \qquad \text{（水平面内到来角一様）} \tag{16}$$

である。

<u>自己相関の近似式</u>

２章および３章の解析から分かるように、位相変動による BER 解析の主領域は相関係数が 0.9 以上、すなわち１に近い部分である。相関係数がこれより小さい領域では、誤りの発生確率が大きくなりすぎて（=BER が 0.1 を超えるような環境になり）、対策無しでは通信ができないからである。そこで、相関係数が１に近い部分の近似式を求めておく。

相関係数ρ は一般には複素数なので、その絶対値の二乗値$\rho_P = |\rho|^2$ に着目する。

$$\rho_P = |\rho|^2 \tag{17}$$

このρ_P は、物理的にはレイリーフェージング環境における電力変動の相関係数であるが[2]、ここでは、単に２乗値が扱いやすく、近似を議論するのに問題がないためと理解して欲しい。このρ_P を以下のようにテイラー展開すると、

$$\rho_P(\Delta t) = \rho_P(0) + \frac{1}{1!}\rho_P{}'(0)\Delta t + \frac{1}{2!}\rho_P{}''(0)\Delta t^2 + \cdots \tag{18}$$

$$\rho_P{}'(0) = \left.\frac{\partial |\rho(\Delta t)|^2}{\partial \Delta t}\right|_{\Delta t=0}$$

$$= \frac{1}{4\sigma_s^4} \left.\frac{\partial\left(\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\exp\left(j2\pi f\Delta t\right)d\nu \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\exp\left(-j2\pi f\Delta t\right)d\nu\right)}{\partial \Delta t}\right|_{\Delta t=0} = 0$$

$$\rho_P{}''(0) = \left.\frac{\partial^2 |\rho(\Delta t)|^2}{\partial \Delta t^2}\right|_{\Delta t=0}$$

$$= -\frac{2\pi^2}{\sigma_s^4}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f)df \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\, S(f)df\right)^2\right\}$$

$$= -8\pi^2\sigma_f^2$$

であるので、

$$\rho_P(\Delta t)\left(= |\rho(\Delta t)|^2\right) \approx 1 - 4\pi^2\sigma_f^2\Delta t^2 \tag{19a}$$

となる。相関係数が実数であって、かつ 1 に近い場合は

$$\rho(\Delta t) \approx 1 - 2\pi^2\sigma_f^2\Delta t^2 \tag{19b}$$

と表される。この後の BER 解析では、この特性を利用することになる。

２．Fast fading による誤り発生のメカニズム

本題の BER 推定式に入る。変復調方式における受信側の検波方式には、搬送波を再生して基準位相とする同期検波方式と 1 シンボル前の信号を基準位相とする遅延検波方式がある。同期検波では狭帯域フィルタを用いて SN 比の高い基準信号を得ることができるが、遅延検波では、信号成分にも基準信号にも雑音の影響が入るので、誤り率を低く抑えたい場合には同期検波方式が有利である。一方、同期検波では、狭帯域フィルタによってフェージングによる位相変動への追従が遅延検波に比べて遅れるため、移動通信のような fast fading 環境では遅延検波が有利である。本資料ではその遅延検波を対象にする。同期検波のフィルタの時定数を T とすれば、本レポート解析での $T_s \rightarrow T$ とすることで、凡その BER 推定は可能である。

図３は遅延検波の受信系である。図より出力信号は

$$u^*(t-T_s)u(t) = a^*(t-T_s)a(t)s^*(t-T_s)s(t) + \text{雑音成分} \tag{20}$$

となる。ここでは、雑音成分が無視できるほどに小さく、故に、位相変動のみで誤りは発生する場合を考える。式(20)より、位相変動によって誤りが発生するのは

DBPSK: $\mathrm{Re}[a^*(t-T_s)a(t)] \le 0$ → $\pi/2 \le |\Delta\phi| < \pi$

DQPSK: 1 シンボルで 1 ビット誤り → $\pi/2 \le |\Delta\phi| < 3\pi/2$

1 シンボルで 2 ビット誤り → $3\pi/2 \le |\Delta\phi| < \pi$

ここで、$\Delta\phi$は $a(t\text{-}T_s)$と $a(t)$の位相差である。

これより、SN 比が無限大条件での BER 推定は位相差$\Delta\phi$の確率分布 $p(\Delta\phi;\rho)$が求められれば、次式により計算できることになる。

$$P_{e,DBPSK} = 2\int_{\pi/2}^{\pi} p\left(\Delta\phi;\rho\right) d\Delta\phi \tag{21a}$$

$$P_{e,DBPSK} = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} p\left(\Delta\phi;\rho\right) d\Delta\phi + 2\int_{3\pi/4}^{\pi} p\left(\Delta\phi;\rho\right) d\Delta\phi \tag{21b}$$

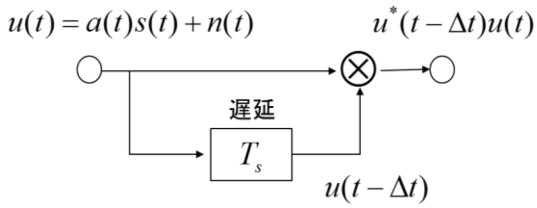

図３　遅延検波回路（DBPSK, DQPSK）

<u>位相差$\Delta\phi$の確率分布</u>

位相差$\Delta\phi$ の確率分布を求める。先ず、以下の定義を行う。（注：３章では雑音を含めて定式化するので、そのときは、x_0, x_1 の定義が異なる）

$$x_0 \equiv \mathrm{Re}[a(t-\Delta t)],\ \ x_1 = \mathrm{Re}[a(t)] \tag{22}$$

変数 x_0 と x_1 の結合確率分布 $p(x_0,x_1;\rho)$は式(8)で与えられている。このとき、x_0 の下で x_1 となる条件付確率 $p(x_1|x_0;\rho)$は次式になる。

$$p\left(x_1 \mid x_0;\rho\right) = \frac{p\left(x_0,x_1;\rho\right)}{p(x_0)} = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi\left(1-\rho^2\right)}}\exp\left(-\frac{\left(x_1-\rho x_0\right)^2}{2\sigma_s^2\left(1-\rho^2\right)}\right) \tag{23}$$

変数 y_0y_1 の関係も同様である。ここで、

$$\left(x_0, y_0\right) \to \left(r_0, \phi_0\right),\ \left(x_1, y_1\right) \to \left(r_1, \phi_0 + \Delta\phi\right) \tag{24}$$

として、直角座標を極座標に変換し、r_0, r_1, ϕ_0 で積分して $\Delta\phi$ の周辺確率を求めると以下の式が得られる（この式は Bramley [3] により、スペースダイバーシチ解析で導かれた）。

$$p\left(\Delta\phi;\rho\right) = \frac{1-\rho^2}{2\pi\sqrt{1-\mu^2}}\left\{1+\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\mu\right)\right\} \quad (\mu = \rho\cos\Delta\phi) \tag{25}$$

これを(21)式に代入すれば、位相変動による誤りが計算されるはずである。しかし、これを代入した式は積分が解けるようには見えず、実用的な意味では使いにくい形である。そのため、簡易な計算式が導かれる別の方法を次章で示す。なお、(25)式を代入した(21)式の数値計算結果も次章（図５）で示すが、別の方法で得られる式の結果と一致しており、誤り推定の考え方としてはこれでよいと言うことになる。

３．簡易な BER 推定式

【遅延検波 BPSK（DBPSK）の場合】

先ず、DBPSK からはじめる。２章と同様な意味の受信信号を考えるが、x_0, y_0, x_1, y_0 は熱雑音も加わった状態とするための再定義を行う。

$$u_i = a_i s_i + n_i \equiv x_i + jy_i \quad (i = 0,1;\ 0 \to t = t_0,\, 1 \to t = t_0 + \Delta t) \tag{26}$$

信号の符号は $s_0=s_1=1$ または、$s_0=s_1=-1$ であるときを考える（[1]では M (Mark)の状態）。このとき、誤りは、以下の状態で発生する。

$$z \equiv \mathrm{Re}[u_0^* u_1]\left(= x_0x_1 + y_0y_1\right) \le 0 \tag{27}$$

故に、z の確率分布 $p(z)$が求められれば良い。変数 x_0, x_1, y_0, y_1 は $N(0,\sigma_s^2+\sigma_n^2)$で与えられる正規分布、$x_0$ と x_1、y_0 と y_1 の結合確率分布は(23)式により与えられている（ただし、同式のσ_s^2 を$\sigma_s^2+\sigma_n^2$ に変える）。

導出には、和の分布を計算しやすい特性関数を用いる。手順としては、先ず、x_0x_1 と y_0y_1 の特性関数を求め、次に、$x_0x_1+y_0y_1$ の特性関数を求める。最後に逆変換して求めたい確率分布を得る。確率分布と特性関数はフーリエ変換対であり、確率変数を代表して x を用いると、

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X)\exp\left(j2\pi Xx\right)dx \tag{28a}$$

$$P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\exp\left(-j2\pi Xx\right)dX \tag{28b}$$

である。変数 x_0x_1、y_0y_1 のそれぞれの特性関数は

$$P_{x_0x_1}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x_0,x_1)\exp\left(-j2\pi Xx_0x_1\right)dx_1dx_0 \tag{29a}$$

$$P_{y_0y_1}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(y_0,y_1)\exp\left(-j2\pi Xy_0y_1\right)dy_1dy_0=P_{x_0x_1}(X) \tag{29b}$$

となり、$x_0x_1+y_0y_1$の確率分布の特性関数は次式となる[1]。

$$\begin{aligned}P_{x_0x_1+y_0y_1}(X)&=P_{x_0x_1}(X)P_{y_0y_1}(X)\\&=\frac{1}{1+\left(2\pi c\sigma_nX\right)^2}\exp\left\{-2E_0^2\left(\frac{(\pi X)^2(c^2+\rho^2\sigma_n^2)+j\pi\rho X}{1+\left(2\pi c\sigma_nX\right)^2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{30}$$

$$c^2=\sigma_n^2+\sigma_s^2(1-\rho^2)$$

これを逆変換して確率分布を求めると

$$\begin{aligned}p(z)&=\frac{1}{2\left(\sigma_s^2+\sigma_n^2\right)}\exp\left(\frac{z}{\sigma_s^2\left(1-\rho\right)+\sigma_n^2}\right)\\&=\frac{\sigma_n^2}{2\left(\gamma+1\right)}\exp\left(\frac{\sigma_n^2z}{\gamma\left(1-\rho\right)+1}\right)\qquad(\text{CNR}：\gamma=\sigma_s^2/\sigma_n^2)\end{aligned} \tag{31}$$

となる。BER は変数 z が負になる確率であり、

$$P_{e,DBPSK}=\int_{-\infty}^{0}p(z)dz=\frac{\sigma_n^2}{2\left(\gamma+1\right)}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{\sigma_n^2z}{\gamma\left(1-\rho\right)+1}\right)dz=\frac{\gamma\left(1-\rho\right)+1}{2\left(\gamma+1\right)} \tag{32}$$

上式の最右辺は二つの成分に分けることができ、

$$P_{e,DBPSK}=\frac{\gamma\left(1-\rho\right)+1}{2\left(\gamma+1\right)}=\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}+\frac{\gamma\left(1-\rho\right)}{2\left(\gamma+1\right)} \tag{33}$$

となる。右辺の第 1 項が熱雑音による BER、第 2 項が位相変動（fast fading）による BER であり、全体の BER は両者の足し合わせで表される。さらに、SN 比γが十分大きい状態では

$$P_{e,DBPSK}\approx\frac{1-\rho}{2}\quad\left(\gamma\to\infty\right) \tag{34}$$

となる。移動通信の古典になっている Jakes の本[4]でも、位相変動による BER が取り上げられているが、話は(33)式から始まっている。

BER の推定式を、熱雑音による BER と(34)式による BER を単純に加えた次式を用いるのが、実用的であろう。

$$P_{e,DBPSK} \approx \frac{1}{2(\gamma+1)} + \frac{1-\rho}{2} \tag{35}$$

図４は、(33)式と(35)式（簡易式）の計算結果を比較しているが、両者は誤差が見えない程度に一致し、簡易式（(35)式）の利用で、まったく問題ないことが分かる。なお、γ が大きいところでは、BER のカーブは位相変動による BER のみに支配されて平坦になるので、その部分は BER のフロア値（BER フロア）と呼ばれる。

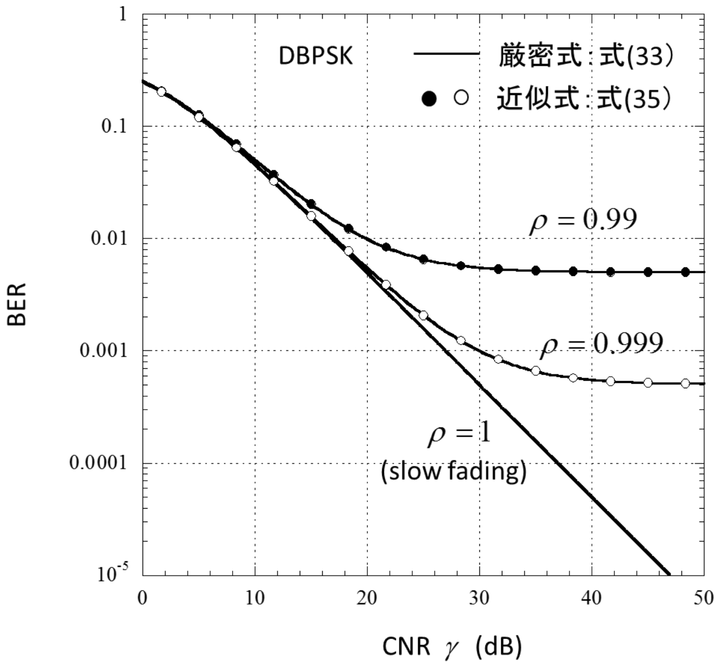

図４ DBPSK の BER 推定に関する二つの計算法の比較

【遅延検波 QPSK（DQPSK）の場合】

DQPSK についても、DBPSK と同様な考え方で求めることができる。ただ、1 シンボル当たり１ビット誤りと２ビット誤りなど場合分けも有り、QBPSK よりは手順は複雑である。ここでは、Voelcker 論文[1]の結果のみを示す。位相変動のみ（すなわち$\gamma \rightarrow \infty$）による 1 シンボル当たり 1 ビットの誤り率を P_{e1}、２ビットの誤り率を P_{e2} とすると、それらは以下の式となる（詳細は[1]を）

$$P_{e1} = \frac{1}{2} - \frac{2\rho}{\pi\sqrt{2-\rho^2}} \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \tag{36a}$$

$$P_{e2} = \frac{1}{4} - \frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right)\right\} \tag{36b}$$

全体の BER は次式となる。

$$\begin{aligned} P_{e,DQPSK} &= \frac{1}{2} P_{e1} + P_{e2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \approx \frac{1-\rho^2}{2} \qquad (\rho \approx 1) \end{aligned} \tag{37}$$

上式の最終辺は、ρ が 1 に近いとする近似により得られる。

【計算式のまとめ】

位相変動のみ（$\gamma \rightarrow \infty$）による BER 推定式を以下により整理する。

DBPSK

① $$P_{e,DBPSK} = \frac{1-\rho}{2}$$

DQPSK

② $$P_{e,DQPSK} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right)$$

ρ=1 付近の近似式

③ $$P_{e,DQPSK} \approx \frac{1-\rho^2}{2}$$

上記の計算式に２章で定式化した計算式（積分で与えた式：式(25)→ (21)）を加え、相関係数 ρ を 0.8～0.9999 とした計算結果を図５に示す。図より、積分計算式と①、②は完全に一致すること、DQPSK の簡易式③も実用的にはまったく問題ないことが分かる。２章で述べた積分式を閉形式で表すことが難しいとして Voelcker は３章の方法を採ったが、この一致度を見ると、積分式も突き詰めて行くと①、②の式に至るのかもしれない。

相関係数とドップラースプレッドには(19)式の関係があるので、これを用いて表すと、冒頭で示した(2)式となる。

$$P_{e,DBPSK} \approx \left(\pi\sigma_f T_s\right)^2 \tag{38a}$$ (式(2a)の再掲)

$$P_{e,DQPSK} \approx 2\left(\pi\sigma_f T_s\right)^2 \qquad (38b) \qquad (\text{式(2a)の再掲})$$

さらに、水平面の全方向から一様に到来する環境においては、(16)式より $\sigma_f = f_D/\sqrt{2}$ であるので、(1)式で与えた

$$P_{e,DBPSK} \approx \frac{1}{2}\left(\pi f_D T_s\right)^2 \quad (\text{水平面内到来角一様}) \qquad (39a) \qquad (\text{式(1a)の再掲})$$

$$P_{e,DQPSK} \approx \left(\pi f_D T_s\right)^2 \quad (\text{水平面内到来角一様}) \qquad (39b) \qquad (\text{式(1b)の再掲})$$

となり、本資料の目的はここに完結した。

図６はこの結果の確認のため、計算機シミュレーションとの比較結果も示す（DQPSK の計算は簡易式③）[2]。式(38)より、BER 特性は$\sigma_f T_s$（正規化ドップラースプレッド）に依存するので、図では横軸を$\sigma_f T_s$で与えている。ドップラーパワースペクトルの形が異なっていても、正規化ドップラースプレッドが同じであれば、BER 特性も近似的な意味で同じになることが確かめられる結果になっている。

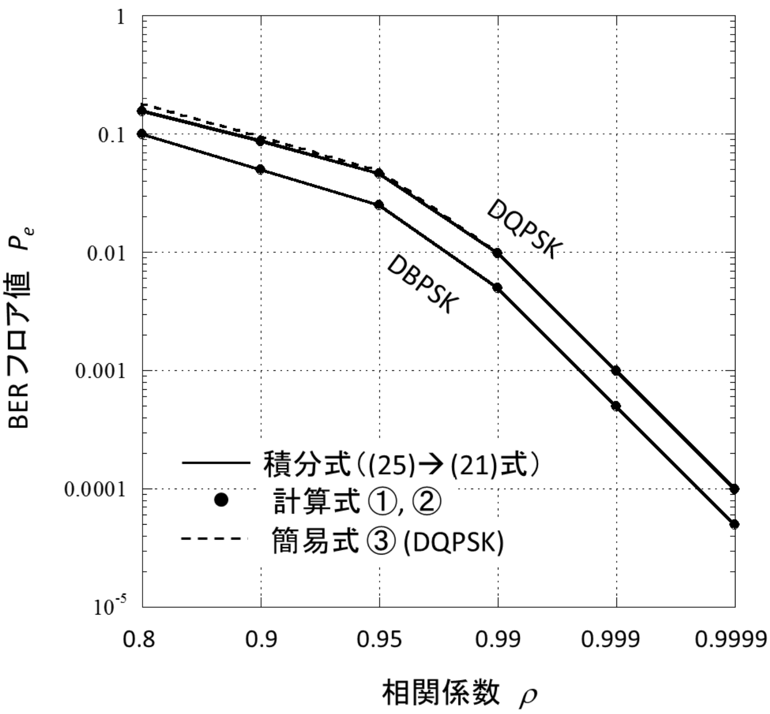

図５ DBPSK, DQPSK の相関係数に対する BER 特性

（実際の計算点は、横軸に示した６つの相関値のみで、その間は直線で結んでいる）

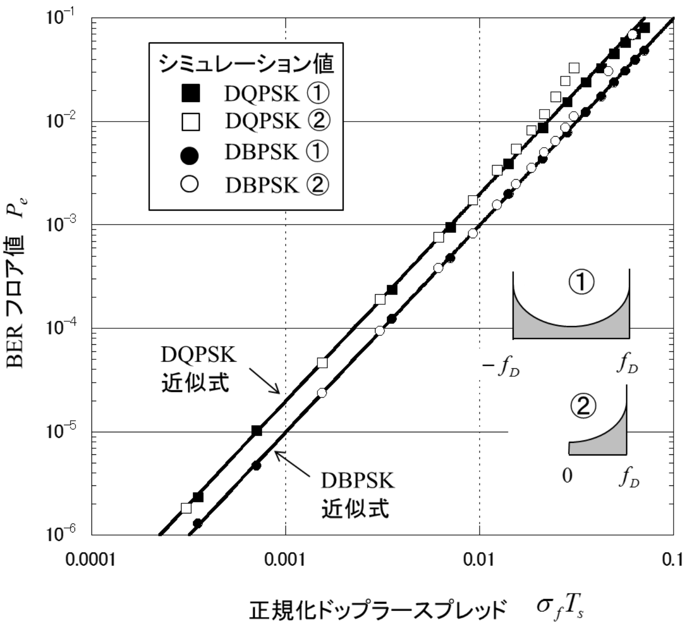

図６　位相変動（fast fading）による BER 特性 [2]

４．スペースダイバーシチへの展開

Voelcker 論文では、スペースダイバーシチ（最大比合成）での BER 推定への拡張も示している。結果の一例を示すと、DBPSK で２素子アレーの場合は次式を得ている。

$$P_{e,DBPSK,2} = \frac{1-\rho}{2}\left(1 - \frac{\rho(1+\rho)}{2}\right) \tag{40a}$$

$\rho \approx 1$として、近似式を求めると次式となる。

$$P_{e,DBPSK,2} \approx 3\left(\frac{1-\rho}{2}\right)^2 = 3P_{e,DBPSK}^2 \tag{40b}$$

その後の展開として、Adachi 等は DQPSK に対する各種ダイバーシチ合成方式に対して、以下の式を導いている[5],[6]。

$$P_{e,DQPSK,M} \approx 2^M K_M P_{e,DQPSK}^M \tag{41}$$

ここで、M はアンテナ素子数、K_M はダイバーシチ合成方式と M に依存する定数である。M=2 の場合、最大比合成では K_M=3/4 であり、(40b)式の形と符合している。

スペースダイバーシチは受信信号の SN 比が大きくなるように（実際の動作では受信電力が大

きくなるように）アレー素子の合成ウェイトを制御する規範であり、位相変動を考慮するものではない。しかし、この規範によって動作すると、結果として位相変動誤りも軽減できることが分かる。受信電力が大きい状態は、同時に位相変動の影響も受けにくい状態になっていると言うことで理解できる。同様なことは遅延広がりによる符号間干渉誤りについても言え、スペースダイバーシチは総合的な意味で強固なフェージング対策である。

参考文献

[1] H. B. Voelcker, “Phase-shift keying in fading channels,” Proc. IEE, vol. 107, Part B, pp. 31-38, 1960.

[2] 唐沢好男，改訂 ディジタル移動通信の電波伝搬基礎，コロナ社, 2016.

[3] E. N. Bramley, “Diversity effects in space-areal reception of ionospheric waves,” Proc. IEE, Paper no. 1062, vol. 98, Part III, 1951.

[4] W. C. Jakes (Ed.), Microwave Mobile Communications, IEEE Press, 1993. （1974 の復刻版）

[5] F. Adachi and J. D. Parsons, “Error rate performance of digital FM mobile radio with postdetection diversity,” IEEE Trans. Commun., vol. 37, no. 3, pp. 200-210, 1989.

[6] F. Adachi and K. Ohno, “BER performance of DQPSK with postdetection diversity reception in mobile radio channels, IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. 40, no. 1, pp. 237-249, 1991.