

等価伝送路モデルによる符号間干渉誤りの完備な計算法

～BER マップの数式化による～

唐沢好男

本技術レポートのシリーズは、筆者等が構築してきた等価伝送路モデル (ETP モデル) の解説 [1] からスタートした。等価伝送路モデルは、周波数選択性フェージング環境を表すキーパラメータを組み込んだチャンネルモデルであり、符号間干渉誤りや再生クロックのサイクルスリップの推定に力を発揮している。しかしながら、このモデルで実際に符号間干渉誤り特性を計算してみたいと思ったとき、計算の一部で事前に準備するデータベース (変復調方式毎の 2 波モデルでの BER マップ) が必要になり、それが無いと使えないものであった。本レポートではこの BER マップ (の一部) を数式に置き換え、符号間干渉誤りの計算法として完備な形を示す。

1. BER マップの数式化

1. 1 2 波モデルでの符号間干渉誤り

遅延差が $\Delta\tau$ の 2 波モデルで、それぞれの複素振幅 a_1 、 a_2 の伝搬環境を考える (図 1)。時間変化は無く、この状態が通信の間固定している。インパルス応答は以下の式で表される。

$$h(\tau) = a_1 (= r_1 e^{j\phi_1}) \delta(\tau) + a_2 (= r_2 e^{j\phi_2}) \delta(\tau - \Delta\tau) \quad (1)$$

$$r \equiv |a_2 / a_1| = r_2 / r_1, \quad \phi \equiv \arg(a_2 / a_1) = \phi_2 - \phi_1, \quad x \equiv 20 \log_{10} r$$

デジタル変調波のシンボル周期 T_s に対して、遅延差 $\Delta\tau$ は十分小さいとする (注: 近似式の展開では $\Delta\tau \ll T_s$ とするが、実際には $0.5T_s$ 程度以下で通用する)。

送信信号のデジタルシーケンスを d_i 、帯域制限フィルタの時間応答特性を $u(t)$ とすると、送信波形 $s(t)$ は

$$s(t) = \sum_i d_i u(t - iT_s) \quad (2)$$

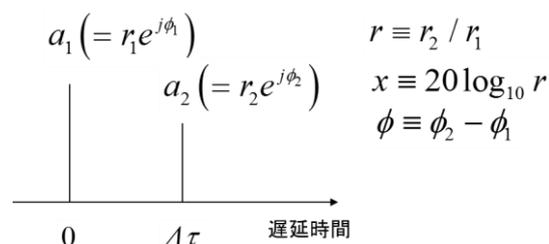


図 1 2 波モデル

である。受信信号は、2波モデルの場合次式である。

$$r(t) = h(t) \otimes s(t) + n(t) = a_1 \sum_i d_i u(t - iT_s) + a_2 \sum_i d_i u(t - iT_s - \Delta\tau) + n(t) \quad (3)$$

ここで、 $n(t)$ は受信機の雑音信号である。

受信側での検波・復調には種々の方式があるが、例えば、同期検波では、サンプルタイミング（クロック位相）を T_{samp} として、以下の式で信号抽出ができる。

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{(a_1 + a_2)^*}{|a_1 + a_2|} r(jT_s + T_{samp}) \\ &= \frac{(a_1 + a_2)^*}{|a_1 + a_2|} \left[a_1 \sum_i d_i \{u(j-i)T_s + T_{samp}\} + a_2 \sum_i d_i \{u(j-i)T_s - \Delta\tau + T_{samp}\} + n(jT_s + T_{samp}) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

検波信号 y_j から送信系列 d_i が判定できたとき伝送は正常であり、そうならない場合はどこかに誤りがあることになる。ここでは、熱雑音の問題を無視し（=信号レベルが十分高いとし）、隣接する符号同士が干渉する符号間干渉誤りのみを対象にする。

検討している時間不変の2波モデルにおいて、誤りの発生に影響を与える要因には以下のものがある。

- ① チャネル特性（遅延差 $\Delta\tau$ 、振幅比 r 、位相差 ϕ ）
- ② 変復調方式
- ③ 変調信号のシンボル周期： T_s
- ④ 帯域制限フィルタの特性： $u(t)$
- ⑤ サンプルタイミング： T_{samp}

①は電波伝搬の問題、②～④は通信方式（システム）の問題、⑤は両者が関連する問題になる。先に⑤について調べる。受信変調信号の包絡線変動を中心周波数 $1/T_s$ の狭帯域バンドパスフィルタで抽出し、その周期変動のピーク値の位置からサンプルタイミングを決めるのが自然である。このとき、2波モデルでのサンプルタイミングは

$$T_{samp} = \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{T_s}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{(r^2 - 1) \sin(\pi\Delta\tau / T_s)}{(r^2 + 1) \cos(\pi\Delta\tau / T_s) + 2r \cos \phi} \right\} \quad (5)$$

で定められる[2],[3]。本レポートでもこれを採用する。

②の変復調方式依存性は個別に対応するしかない。④は通常使われるナイキストフィルタ（raised-cosine roll-off filter）で検討する。この場合、パラメータであるロールオフファクタに依存するが、その影響はきわめて小さい（roll-off ファクタ: 0.25,0.5,0.75 で比較確認済み。以降は0.5に設定）。①の影響が主問題になるが、影響の大きさは③に依存し、常に、 $\Delta\tau T_s$ の形（ T_s で正規化した形）で現れる。①について、全ての変復調方式に共通に適用できることを目的に構築したモデルが等価伝送路モデルである[1],[4]。

通常の帯域制限フィルタでは中心シンボルに対して前後3シンボル程度に符号間干渉の影響

が残るので、遅延差が1シンボル周期よりある程度小さい場合には、符号間干渉はこの6シンボルの影響を考慮すればよい。全ての符号（の中にあるビット）の組み合わせの一つ一つに対して誤りの発生の有無を調べていけば、2波モデルでの誤り率が理論的に求められる[5]。しかし、これを、2波モデルのパラメータである $r, \phi, \Delta\tau/T_s$ に対して簡易な式で表現するのは、簡単ではないことが予想され、筆者はまだその数式を見たことが無い。

1. 2 BER マップ

まず、図1の2波モデルの $x (=20 \log_{10} r)$, ϕ に対する誤りの発生状態をシミュレーションによって見てみよう。同期検波 QPSK(CQPSK)で $\Delta\tau=0.2T_s$ 場合、図2(a)がそれである（このシリーズではほぼ毎回出している）。当然予想されるように、 $x=0$ (dB) ($r=1$), $\phi=\pi$ を中心とする比較的狭い範囲に誤りが集中している。筆者等は、このように表示された BER 表示を BER マップと読んでいる。BER マップの形は、変復調方式毎に違い、同図(b)は遅延検波 QPSK (DQPSK)である。

BER マップの特性を $E_0(x, \phi, \Delta\tau/T_s)$ で表す。前回レポート[6]で示したように、 $\Delta\tau$ が T_s に対して十分小さいとき、通信路の伝達関数 $T(f)$ に対して、 $T'(0)/T(0)$ が同じ環境では同じ誤り率になる。このため、 $\Delta\tau=\Delta\tau_{ref}$ の BER マップに対して、 $\Delta\tau=\Delta\tau_{wanted}$ の場合、

$$\gamma = \frac{\Delta\tau_{wanted}}{\Delta\tau_{ref}} \quad (6)$$

とするとき、マップの横軸の対数スケールに対しては γ 倍に、縦軸の π を中心とするその差分についても γ 倍になる性質が理論的に導かれる。ゆえに、変復調方式毎に1枚の BER マップ $E_{0,ref}(x, \phi, \Delta\tau_{ref}/T_s)$ が用意されれば、 γ によるスケーリング変換で、 $\Delta\tau=\Delta\tau_{wanted}$ の任意の BER マップが得られることになる。すなわち、

$$E_0(x, \phi(=\pi + \Delta\phi); \Delta\tau_{wanted}/T_s) \approx E_{0,ref}\left(\frac{x}{\gamma}, \pi + \frac{\Delta\phi}{\gamma}; \Delta\tau_{ref}/T_s\right) \quad (7)$$

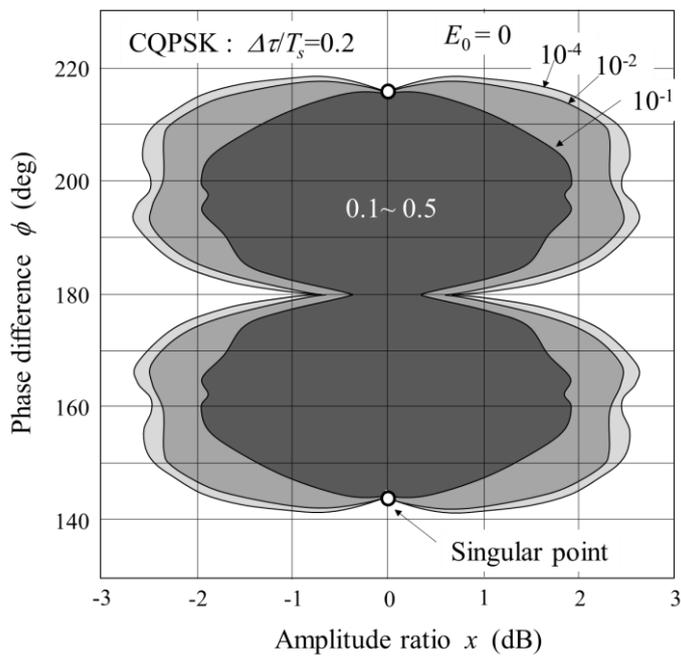
である。ここでは $\Delta\tau_{ref}$ を $0.2T_s$ に定め、以下のモデル計算ではこの BER マップを用いる。

2波モデルによる BER を簡易な理論式で表現するのは困難と述べ、図2を得るのを計算機シミュレーションに頼ったが、得られた結果は理論値を代理するものと考えてよいであろう。

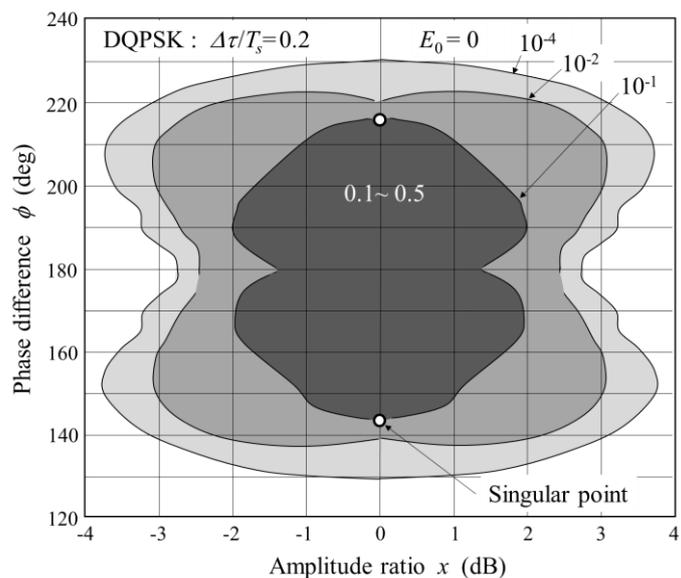
図3の実線は、CQPSK の $\Delta\tau/T_s=0.1, 0.2$ (基準), $0.3, 0.4$ について、2変数 BER マップを

$$E_{0,x}(x; \Delta\tau/T_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_0(x, \phi; \Delta\tau/T_s) d\phi \quad (8)$$

の周辺積分をして x のみの関数にし、この値の常用対数値を縦軸にしている。同図の点線は、(8)式右辺の E_0 を(7)式のスケーリング式で置き換えたものである。スケーリング式では 0.4 に対して、BER の発生範囲が少し広がっていて、形状相似性を使う場合の誤差になる。ただ、広い方向にずれているので、推定が安全サイド (BER を大きめに推定する方向) になって、実用的にはこの範囲にスケーリングを適用して問題はない。



(a) CQPSK



(b) DQPSK

図2 BER マップ ($\Delta\tau/T_s=0.2$)

(図中の Singular point は信号の包絡線変動が消えてサンプルタイミングが定まらない特異点[3]。)

本稿の話に直接関係せず、参考情報)

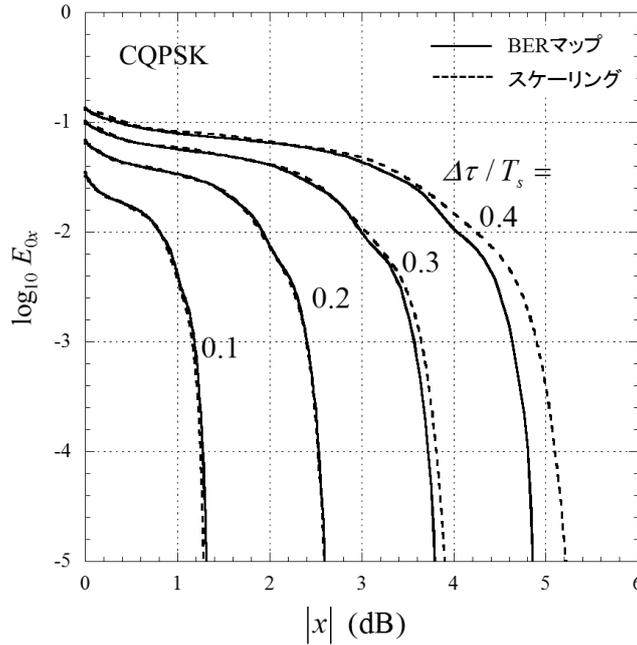


図3 2波モデル BER マップの振幅比特性の遅延差依存性

1.3 BERの振幅比特性とその数式化

フェージングを受けた受信信号の位相が一様に分布する場合は、符号間干渉による誤りの推定に際しては、式(8)で表される振幅比の分布のみが利用される。そこで、基準BERマップである $\Delta\tau/T_s=0.2$ について、式(8)で表される x の関数とする近似式を求める。すなわち、

$$E_{0x,ref}(x) = 10^{g(x)} \tag{9a}$$

$$g(x) = \log_{10} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_0(x, \phi; \Delta\tau_{ref}/T_s) d\phi \right) \quad (\Delta\tau_{ref}/T_s = 0.2) \tag{9b}$$

とすると、各変復調方式に対しては、次式の多項式で高精度に近似できる。

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^8 c_i |x|^i \tag{10}$$

表1は、同期検波 QPSK (CQPSK)、遅延検波 QPSK (DQPSK)、16QAM、同期検波 BPSK (CBPSK) について、 $g(x)$ の係数 ($c_0 \sim c_8$) と相関係数 (R 値)、さらには、誤りが発生する領域の $|x|$ の上限 x_{max} をまとめている。いずれも、高い相関係数値を示しており、基準とする $\Delta\tau/T_s=0.2$ の近似式として問題ない精度であることを確認している。これにて、システム側の準備が整ったことになる。

表 1 $g(x)$ 近似式の各係数値

| | CQPSK | DQPSK | 16QAM | CBPSK |
|----------------|----------|----------|-------------|---------|
| c_0 | -1.1939 | -1.183 | -1.0839 | -1.4201 |
| c_1 | 0.015287 | -0.1774 | 0.088941 | -1.3122 |
| c_2 | -5.6833 | -1.3873 | -0.36319 | -108.02 |
| c_3 | 22.115 | 3.4985 | 0.22689 | 1488.2 |
| c_4 | -38.77 | -4.2162 | -0.068347 | -8285.5 |
| c_5 | 36.348 | 2.8319 | 0.0095116 | 23528 |
| c_6 | -18.816 | -1.0767 | -0.00052149 | -36586 |
| c_7 | 5.0561 | 0.21387 | 0 | 29896 |
| c_8 | -0.55049 | -0.01716 | 0 | -10094 |
| R | 0.99975 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99747 |
| x_{max} (dB) | 2.62 | 3.7 | 7.0 | 0.74 |

2. 仲上・ライスフェージング環境における符号間干渉誤りの計算式

ここでは、レイリーフェージング環境を含んでより一般的な仲上・ライスフェージング環境での符号間干渉誤りを対象とする計算式を述べる。この推定には、伝搬環境をキーパラメータで構成される統計モデルで置き換える等価伝送路モデルを用いるが、式の導出や精度の検証は[1],[4]に、また、その理論的根拠については、前レポート[6]でまとめているので、ここでは繰り返さない。本レポートでは、これまで計算のネックになっていた BER マップを、近似式を用いて数値計算できるようにしたことが主眼なので、以下では、その具体的な計算式をまとめるだけにする。

キーパラメータ

【仲上・ライスフェージング環境】

- ・ライسفアクタ（定常波信号電力とマルチパス波成分平均電力の比）： $K (= P_0 / P_s)$
([2]では、 $K \rightarrow 1/s^2$)
- ・マルチパス波成分の定常波成分を基準にした平均遅延： τ_m
- ・マルチパス波成分の遅延スプレッド： $\sigma_{\tau,s}$ （[1],[2]では、 $\sigma_{\tau,s} \rightarrow \sigma_{\tau,R}$ ）

【レイリーフェージング環境】

- ・遅延スプレッド： σ_τ

BER 推定の基本式（適用範囲： $\tau_m / T_s, \sigma_{\tau,s} / T_s \leq 0.3$ ）

$$BER_{ISI}(K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}; T_s) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_{r\phi}(r, \phi; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) E_0\{r, \phi; \Delta\tau_e / T_s\} d\phi dr \quad (11)$$

$$f_{r\phi}(r, \phi; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) = \frac{1}{2\pi} f_r(r; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s})$$

$$f_r(r; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) = \frac{2\eta r}{(\eta r^2 + 1)^2} \left(1 + \frac{K(1+\eta)}{\eta(\eta r^2 + 1)} \right) \exp \left\{ -\frac{K(1+\eta)}{\eta} \left(1 - \frac{1}{\eta r^2 + 1} \right) \right\} \left(\eta \equiv \left(\frac{\sigma_{\tau,s}}{\tau_m} \right)^2 \right)$$

$$\Delta\tau_e(\tau_m, \sigma_{\tau,s}) = \frac{\tau_m^2 + \sigma_{\tau,s}^2}{\tau_m} = (1+\eta)\tau_m \quad (\text{注: [1]では、}\eta \rightarrow \eta^2)$$

基本式の簡易化

基本式の f_r が ϕ に依存しない形であること、 E_0 が r の対数に対して正負対称であること、さらには、 E_0 がパラメータ γ に対して形状相似性があることでスケール変換ができることにより、基本式は次式に簡易化できる。

$$BER_{ISI}(K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}; T_s) = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} f_x(x; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) E_{0x} \{x; \Delta\tau_e / T_s\} dx$$

$$\approx \gamma \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} f_x(x; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) E_{0x} \left\{ \frac{x}{\gamma}; \Delta\tau_{ref} / T_s \right\} dx \quad (\gamma \equiv \Delta\tau_e / \Delta\tau_{ref}) \quad (12)$$

$$E_{0x}(x; \Delta\tau_{ref} / T_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_0(x, \phi; \Delta\tau_{ref} / T_s) d\phi$$

$$E_{0x}(x; \Delta\tau_{ref} / T_s) \Big|_{\Delta\tau_{ref}/T_s=0.2} = 10^{g(x)}$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^8 c_i |x|^i \quad (\text{係数 } c_i \text{ は表 1})$$

$$f_x(x) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x}{b}\right) f_r \left\{ \exp\left(\frac{x}{b}\right) \right\} \quad (b \equiv 20 \log_{10} e \approx 8.686)$$

となる。

BER_{ISI} 計算式

上記を整理すると、最終的な計算式は次式である。

$$BER_{ISI}(K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}; T_s) \approx \gamma \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} 10^{g\left(\frac{x}{\gamma}\right)} f_x(x; K, \tau_m, \sigma_{\tau,s}) dx \quad \left(\gamma = \frac{\tau_m^2 + \sigma_{\tau,s}^2}{0.2 T_s \tau_m} \right) \quad (13)$$

積分は解けていないが、数値計算は容易である。

レイリーフェージングの BER_{ISI} 計算式

レイリーフェージングの場合は、 $K=0$, $\tau_m=\sigma_{\tau_s}=\sigma_\tau$ と置く。

$$BER_{ISI}(\sigma_\tau; T_s) \approx \gamma \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} 10^{g\left(\frac{x}{\gamma}\right)} f_x(x; \sigma_\tau) dx \quad \left(\gamma = \frac{10\sigma_\tau}{T_s} \right) \quad (14)$$

$$f_r(r) = \frac{2r}{(r^2+1)^2} \rightarrow f_x(x) \quad (\text{変数変換})$$

仲上・ライスフェージングの等価レイリーフェージング近似

仲上・ライスフェージングの定常波成分も含めて、遅延プロファイル全体をレイリーフェージングの2波モデルとしたときの遅延スプレッド(等価遅延スプレッド)を求めると、次式である。

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{1}{K+1} \left(\frac{K\tau_m^2}{K+1} + \sigma_{\tau_s}^2 \right)} = \sigma_{\tau_s} \sqrt{\frac{1}{K+1} \left(\frac{K}{\eta(K+1)} + 1 \right)} \quad (15)$$

BERの推定は、レイリーフェージングの項に同じである。

3. 符号間干渉による誤り率特性

図4は仲上・ライスフェージング環境において、 $\tau_m=\sigma_{\tau_s}$ (すなわち $\eta=1$)とする符号間干渉誤りのライスファクタ依存性を示す。 $\tau_m=\sigma_{\tau_s}$ の設定は、散乱波成分が指数関数型遅延プロファイルの場合に適用でき、自然な設定である。 $K<-0\text{dB}$ では、ほぼレイリーフェージングの特性になっている。いずれの変復調方式に対しても、 $K>15\text{dB}$ では、符号間干渉誤りが 10^{-6} (bps)程度以下になり、見通し内環境の伝送特性を精度良く評価したい場合に、高精度な推定を可能としている(等価レイリーフェージングの推定では、過大評価になって実態を表していない)。なお、図4は[2]にも同じ結果を載せていて、 $\tau_m=\sigma_{\tau_s}=0.3T_s$ のカーブにやや違いが見えるが、本レポートでは、BERマップを高精度・高密度で再計算して用いているので、本図の結果の方が正確である。

レイリーフェージングでは、 $\sigma_\tau \leq 0.3T_s$ の範囲で誤り率は遅延スプレッドの2乗に比例することが理論的に導かれる[1]。

$$BER_{ISI} \approx \alpha \left(\frac{\sigma_\tau}{T_s} \right)^2 \quad (16)$$

各変復調方式に対して係数 α は、CQPSK, DQPSK, 16QAM, CBPSKに対して、おおよそ、0.78, 0.80, 2.0, 0.070である。

筆者等はさらに、スペースダイバーシチ最大比合成法での符号間干渉誤り推定に、この等価伝

送路モデルを用いた解析を行っている[7]。この場合には、伝搬特性を表す確率分布 f_r が ϕ の関数になるため、本レポートで提案した簡易計算式が適用できず、基本式(11)に基づく BER マップ上での2次元積分が必要になる。

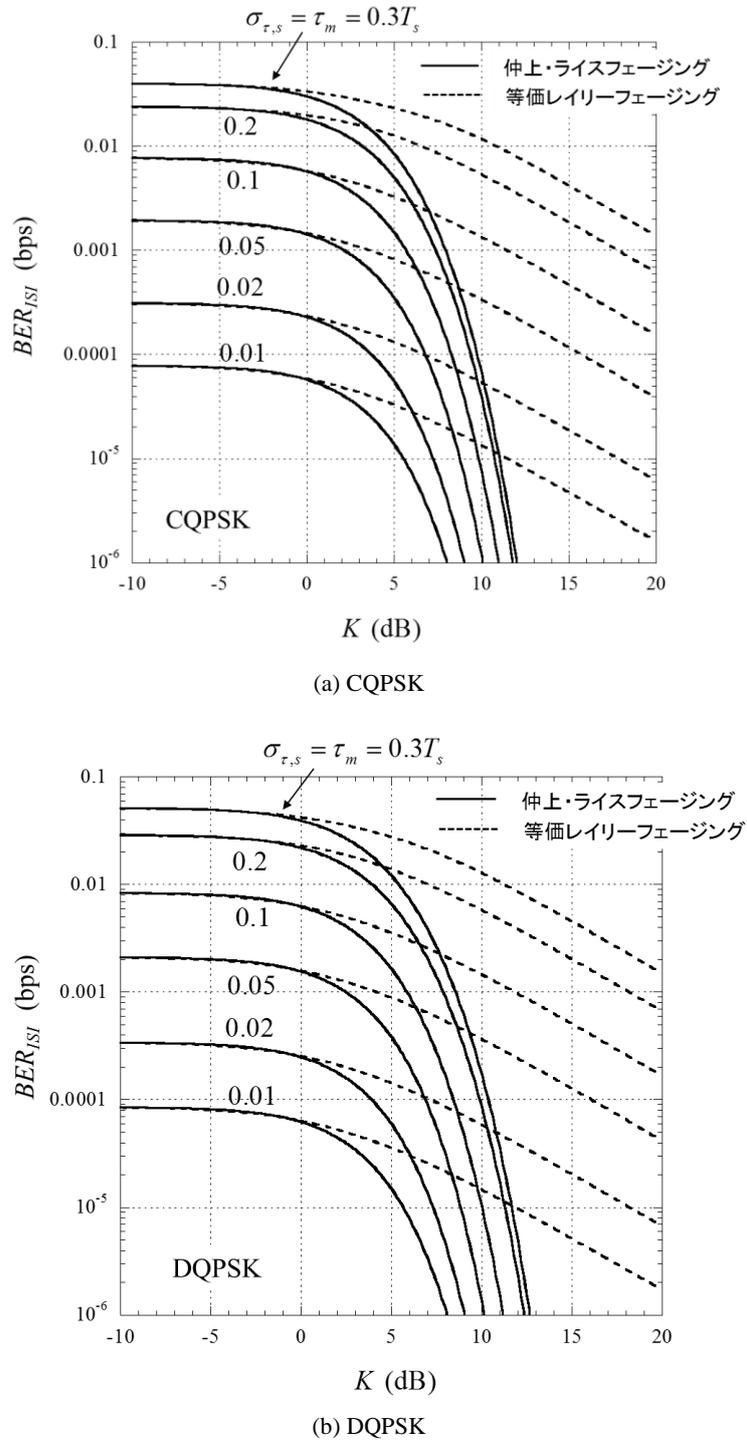
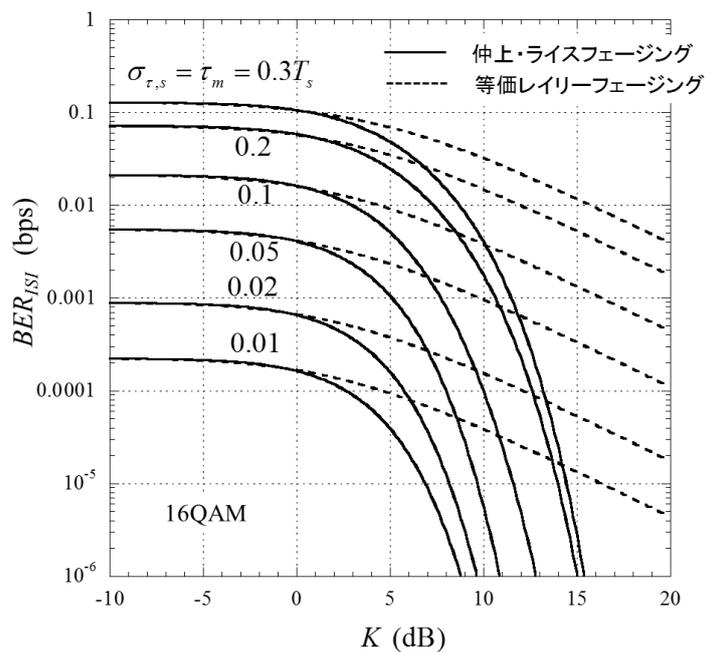
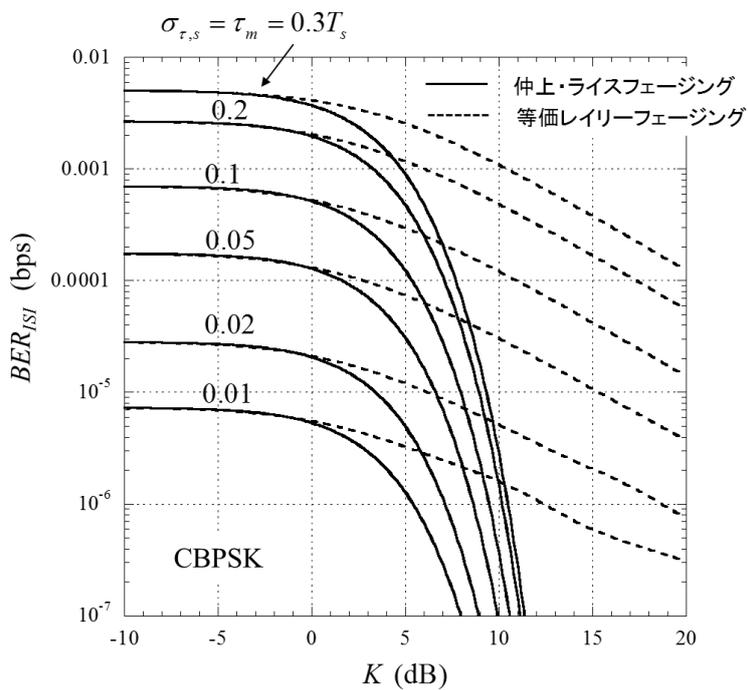


図4 伸上・ライスフェージング環境における符号間干渉誤り特性



(c) 16QAM



(d) CBPSK

図4 (続き)

参考文献

- [1] 唐沢好男, “等価伝送路モデル：その思想と実践,” Tech. Rep. YK-001 (私報), Aug. 2017.
<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/ETP%20model.pdf>
- [2] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [3] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, "Cycle slip in clock recovery on frequency-selective fading channels," IEEE Trans. Commun., vol. 45, 3, pp. 376-383, 1997.
- [4] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, "The equivalent transmission-path model," IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. 47, no. 1, pp. 194-202, 1997.
- [5] P. A. Bello and B. D. Neilin, "Effect of frequency selective fading on binary error probability of incoherent and differentially coherent matched filter receivers," IEEE Trans. Commun. Syst., col CS-11, pp. 170-186, June 1963.
- [6] 唐沢好男, “等価伝送路モデル (ETPmodel) の土台を固める,” Tech. Rep. YK-053 (私報), Oct. 2020.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_053_ETP_Fundamental.pdf
- [7] Y. Karasawa, “BER due to intersymbol interference in maximal-ratio combining reception analyzed based on equivalent transmission-path model,” IEICE Trans. Commun., vol. E103-B, no. 3, pp. 229-230, 2020.