

アレーアンテナのパラドックス (改訂版)

～「重ね合わせの理」か「エネルギー保存則」か～

唐沢好男

もっともらしい二つの考え方があり、その帰結が異なるとき、それをパラドックスと言う。「物理のパラドックスは理解の迷いに過ぎない (ファインマン)」らしいが、それに悩むこと自体が楽しく、なによりその奮闘がより深い理解へと繋がってゆく。ここでは、筆者がずっと気にかかっているアレーアンテナに関する一つのパラドックスを取り上げる。アレーアンテナの素子間隔が狭くなる時のアンテナの利得についてである。線形物理に支配されている電波の世界なのに、重ね合わせの理が働かなさそうに見える。これに関するレポートをYK-062として公開したが、その章構成を少し変え、新たな考察を加えたYK-062-revに差し替えて再公開する (脚注)。

1. 前段：アンテナの基本

パラドックスの話は次章以降で。ここではその議論の前提となるアンテナの基本をまとめる。

アンテナ利得：G

アンテナは受動的な装置なので、入力された電力以上にアンテナから電力が放射されることはないが、特定の角度方向に対して集中して放射される場合には、3次元空間に均一に放射されたときの遠方での電界強度を基準にして電力密度比をとると、その角度に対しては比の値が1以上になる。このため、この比を利得と呼んでいる。極座標表示で表される十分に遠方の地点 (r, θ, ϕ) でのアンテナの放射電界を $E(r, \theta, \phi)$ と表すと、アンテナ指向性利得が次式のように定義される。

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E(r, \theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \right) \quad (1)$$

注：改訂版での大きな変更は、考察で展開したアンテナパターンの固有値解析部分。間違った解釈をしていた。アンテナインピーダンスに関する新たな考察も加えている。

指向性利得 D が距離 r の関数でないのは、 r が十分大きい地点、すなわち、アンテナからの電波が平面波として届く距離では、 D は距離に依存しなくなるためである。この指向性利得の角度特性はアンテナ放射パターンとも呼ばれる。 E が方向 (θ, ϕ) に対して依存性がない場合、すなわち無指向性 (isotropic) である場合には、式(1)の分母での正規化により、全方向に対して $D=1$ となる。ある方向の利得が大きいということは、その方向に集中して電波が放射されているということの意味している。

実際のアンテナは、内部で吸収されたり入力ポートに反射されて戻って来たりして、入力した電力の全部が空間に出てゆくわけではない。そのため、効率 $\eta (\leq 1)$ を用いて、アンテナ利得 G を次式のように定める。

$$G(\theta, \phi) = \eta D(\theta, \phi) \quad (2)$$

本レポートでは、効率 $\eta=1$ を扱い、 $G=D$ とする。この場合、空間に放射される全電力はアンテナ入力電力に等しい、というエネルギー保存則になっている。なお、アンテナの利得には送受可逆性が成り立ち、受信アンテナ利得と送信アンテナ利得は等しい。

アンテナの実効面積 : A

アンテナには実効面積 (あるいは有効面積) の概念があり、受信アンテナとして、どのくらいのエリアの電波を受信しているかの目安になる。電力密度 p_0 [W/m²] の平面波の中にアンテナを置き、整合負荷 (アンテナインピーダンスに等しい) で受信したとき、受信電力が P_r [W] であったとする。このとき、実効面積 A [m²] は

$$A = P_r / p_0 \quad (3)$$

で定義される。

アンテナ利得と実効面積には次式の関係が得られている (導出の詳細は、例えば[1]の第9章、あるいは[2]の第2章などに)。

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad (4)$$

実効面積は受信アンテナに対する概念であるが、送信アンテナに対しても放射エリアとしての面積が定義され、利得の送受可逆性より、実効面積についても可逆性がある。

アンテナの入力インピーダンス (放射抵抗) : R

アンテナ給電部の入力電圧を V 、電流を I 、入力抵抗を R とする。ただし、時間変動の $e^{j\omega t}$ を除き、かつ、それぞれを実数とする (放射電力算定の目的のため)。このとき抵抗 R はオームの法則より $R=V/I$ であるが、抵抗の値そのものは、アンテナの構造によって決まる (例えば、半波長ダイポールアンテナでは 73.13Ω)。このとき、アンテナへの供給電力 P_i は $P_i = I^2 R / 2$ であ

り、アンテナ効率 $\eta=1$ のとき、これが放射電力になる。放射電力はアンテナを囲む遠方閉曲面上の電力密度を積分したものになる。この論理から、放射抵抗(=アンテナの入力抵抗)は次式の性質を持つ。

$$R = \frac{2P_r}{I^2} = \frac{2}{I^2} \times \text{遠方球面上の電力密度の面積分値} \quad (5)$$

アンテナからの放射に対する遠方点における電界： E

遠方点における電界強度は、導体で構成されるアンテナ上の電流分布によって決まる(具体的な式は、例えば[3]に)。電界強度はアンテナ上に分布する電流の大きさに比例する。

電界に関する重ね合わせの理

ある地点において、複数個 N の放射源による電界のそれぞれを E_i ($i=1, 2, \dots, N$)とすると、合成電界 E はそれらのベクトル和 ΣE_i になる。

2. アレーアンテナの利得

2. 1 問題

物事の本質を見極めたいとき、その土俵は可能な限りシンプルであることが望ましい。本レポートの議論の土俵を以下に採る。

- ① 2素子同相合成のアレーアンテナ(図1)
- ② 素子アンテナは無指向性アンテナ
- ③ アレー素子間の結合は無い

目的は、アレーの正面方向(アンテナ基線方向を $\theta=0$ とするときの $\theta=90^\circ$ 方向)のアンテナ利得 G を求めること。

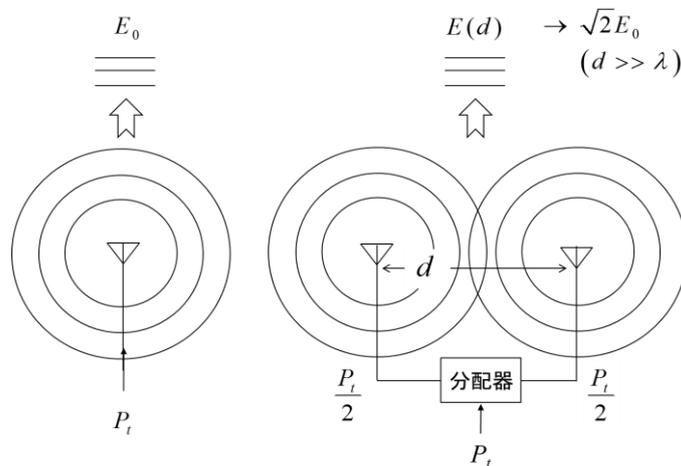


図1 無指向性アンテナを素子(左)とする2素子アレー(右)(送信アンテナ)
(アレー基線方向を $\theta=0$ とし、受信点は $\theta=90^\circ$ 方向の遠方)

2. 2 解法

以下、3つの方法で考える。

(1) 方法1：単純重ね合わせ

前提③を根拠とする。お互いに影響が無いなら、遠方点に現れる電界は二つのアンテナそれぞれの電界の和になる。それぞれのアンテナからの放出電力は単一アンテナの場合に比べて1/2であるから電界強度は $1/\sqrt{2}$ 倍、同相合成される電界は $\sqrt{2}$ 倍である。アンテナの利得は、間隔 d に依存せず常に $G=2$ (3dB) である。 $d=0$ の状態においても重ね合わせの理が成り立つと言う仮定である。

しかしながら、この方法には致命的な欠陥がある。 $d=0$ での電界強度は、どの方向に対しても $\sqrt{2}$ 倍になるので、全立体角で電力を積分すると2になる。アレーアンテナからの放射電力が入力以上に出力されることになり、エネルギー保存則に反してしまうのである。「重ね合わせの理」か「エネルギー保存則」かが問われるのである。

(2) 方法2：アンテナ利得の計算式で

アンテナパターンの計算は方法1でよいとして、これにエネルギー保存則 (=アンテナ利得の定義式) を課すのである。この方法を方法2とする。

任意の方向 (θ, ϕ) に対する一定距離遠方点の電界強度は次式である。

$$E \propto \sqrt{2} \cos\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right) \quad (k \equiv 2\pi/\lambda) \quad (6)$$

これを、エネルギー保存則、すなわちアンテナ利得の定義式(1), (2)に代入すると、アレーアンテナ利得 $G(\theta)$ は次式になる。

$$G(\theta) = \frac{2 \cos^2\left(\frac{kd}{2} \cos\theta\right)}{1 + \frac{\sin(kd)}{kd}} \quad (7)$$

(7)式の分母が、エネルギー保存則を満たすための正規化ファクタになる。目的とする正面方向の利得は次式になる。

$$G(\pi/2) = \frac{2}{1 + \frac{\sin(kd)}{kd}} \quad (8)$$

これによって求められる利得は、 $d \gg \lambda$ (λ : 波長) で $G \rightarrow 2$ 、 $d \rightarrow 0$ で $G \rightarrow 1$ となり、方法1で問題になったエネルギー保存則の破綻は解消され、一見合理的ではある。ただ、アンテナパターン計算に、問題ありと言った方法1の考え方(電界の重ね合わせの理)を用いており、それは大丈夫なのであろうか？

(3) 方法3：アンテナの実効面積

方法1, 2はアレーアンテナを送信アンテナとしているが、アンテナには送受の可逆性があるので、受信アンテナとしてみてみよう。

受信アンテナには(4)式で与えられる実効面積の概念がある。無指向性アンテナの実効面積は $\lambda^2/4\pi$ であり、その形が円であると考えるのが合理的である。この場合は、よく知られているように、円周が1波長の円の面積に相当する。

アレーアンテナの正面方向の受信の場合はそれぞれの素子の実効面積の和になると期待される。ただし、その円が重なった場合はその重なった形の面積である。この重なった部分に幾つアンテナをおいても、面積で受け止める電力以上の電力を吸い上げることはできないという理屈である。図2は重なった場合の形であり、その面積は次式である。

$$A = \begin{cases} \pi a^2 + 2 \left(\frac{d}{2} \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}} + a^2 \sin^{-1} \left(\frac{d}{2a} \right) \right) & (d < 2a) \\ 2\pi a^2 & (d \geq 2a) \end{cases} \quad \left(a = \frac{\lambda}{2\pi} \right) \quad (9)$$

この面積を無指向性アンテナの実効面積 πa^2 で正規化するとアンテナ利得になる。ずいぶん大雑把な話であるが、間隔 d に対する利得の変化は大体こういう感じと、肌感覚で理解するには十分かもしれない。ただし、面積の重なり部分のダブルカウントを避けた算定、すなわちお互いの影響を考慮した算定であるので、上記前提③は外れ、カップリング効果が考慮されていると解釈できる。

図3は上記3つの方法に対するアレー利得の間隔 d 依存性である。どの考え方にも理屈はあるが、差はかなり大きい。特に、重ね合わせの理に基づく方法1と、それにエネルギー保存則を課した方法2では $d=0$ 付近の違いが大きい。

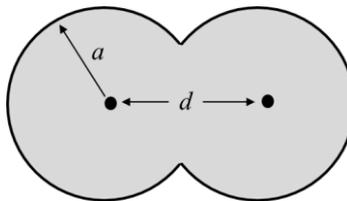


図2 受信アレーアンテナの実効面積 ($d < 2a$ の場合、 $a = \lambda/2\pi$)

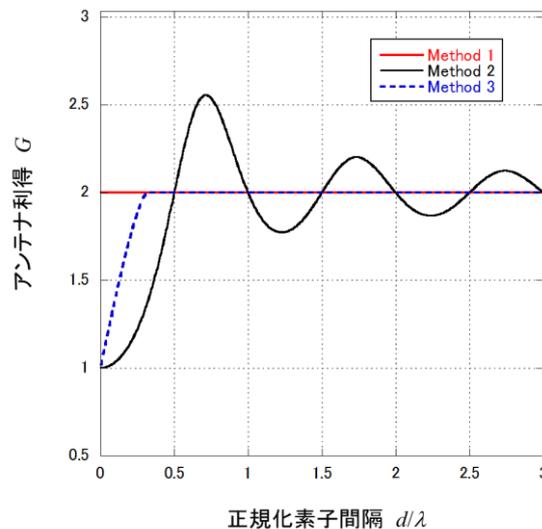


図3 アレーアンテナ利得の素子間隔特性に関する3つの方法の比較

2. 3 パラドックス？

重ね合わせの理に基づく方法1とエネルギー保存則に基づく方法2については、結果の合理性 ($d=0$ で1素子のアンテナと同じになるはず) に照らせば、方法2に理があるであろう。でも、なぜ、電磁気学の電界計算ではほぼ例外なく成立している重ね合わせの理が、この場合は成立しないのだろうか。受信アンテナの場合には、方法3の考え方のおり、実効面積内にいくら重ねても受信電力は増えないと言うのはわかるが、送信アンテナなら、それぞれのアンテナにはちゃんと電力が供給されているのだから良いではないかと思う。一方、送受の可逆性より、受信で重ね合わせの理が破綻しているなら送信だって同じと言わざるを得ないこともわかる。でも、何か肌感覚としてピンと来ないものがあるのだが、皆さんはどうだろうか。

方法1だって良いではないか？でもそれでは駄目。このジレンマが本報タイトルのパラドックスである。

3. 重ねあわせの理とエネルギー保存則を両立させるには

(1) パラドックスが生まれる原因

パラドックスが生まれる原因を考えてみる。ファインマンが言う「物理のパラドックスは我々の理解の未熟に過ぎない」を受け入れたい。そうであれば、パラドックスが生まれる原因は次の2点のどちらかである。

- (i) 問題設定 (前提) が間違っている (あるいは厳密でない)
- (ii) 考えが未熟である (深いところにある真実に気がついていない)

今回の問題はどうかであろう。前提の②、③を採る限りにおいて、物理学の基本原則：重ね合わせの理とエネルギー保存則を両立させることができないように思う。そこで、逆に、こ

ここで議論の規範とした重ねあわせの理とエネルギー保存則を共に満たすには、アンテナがどういう動作になればよいかを考えてみよう。③のお互い影響 (=カップリング) 無しの条件をはずして、その結果が素子アンテナ特性の変化に現れ、②の条件も崩れるとする。

3. 2 方法4：カップリングによってアンテナパターンが変わる

間隔 $d=0$ の極限において、二つの物理規範を満たす動作は、以下のようなものがある。(それが唯一と言う意味ではないことは、次項で述べる方法5もあるように)。「左右の素子アンテナの指向性がそれぞれの側のみを一様に照射する」である。これだと、パターンに重なりが無いので、重ね合わせの理を侵すことなくエネルギー保存則を満たしている。途中の間隔 d について定量的な議論をするのは難しそうに思うが d が0に近づくに従って、だんだん上記極限状態に近づいてくると考えるしかない。方法3の考え方に近そうではあるが、どういうメカニズムでそういうことになるのかはわからない。

3. 3 方法5：カップリングによってアンテナインピーダンスが変わる

遠方受信点での電界(あるいは電力密度)は何によって決まるか?それは、導体(線や面)によって構成されるアンテナに流れる電流の分布によって決まる。その電流分布はどのようにして決まるかという、アンテナの構成による。無指向性アンテナは架空のアンテナでありその具体的な構成イメージは無いが、実効面積に相当する一定の大きさの面があり、そこに、電流が分布していると考えてみよう。分布する電流の大きさは、アンテナポートへの入力電流の大きさに比例するであろう。では、その入力ポートの電流 I は、どのようにして決まるであろうか。それは、1節で述べたように、アンテナへの供給電力を P_i とすると、 $I = \sqrt{2P_i/R}$ である。アンテナの入力インピーダンス R に依存することになる。入力インピーダンスはアンテナの構造によって決まるが、アンテナが接近すると相互結合により値が変わってくるとする。今回のケースでは、結合が無い場合の遠方受信点(アレー正面方向)での電界が $\sqrt{2}E_0$ (E_0 は単一アンテナの場合の電界)であり、 $d=0$ での電界を単一アンテナと同じ E_0 になるべきとすると、素子間結合によってアンテナの入力インピーダンスが R から $2R$ に変わらなければならない。そうであれば、重ねあわせの理とエネルギー保存則が両立し、アンテナパターンそのものは(7)式で求めればよいということになる。すなわち、方法5を採用するなら、アンテナ利得は方法2の算定でよい、ということになる。

3. 4 方法6：固有値問題への帰着

視点を変える。間隔 d 離れた二つの無指向性アンテナの放射パターンの空間相関(アンテナパターン相関)を次式で与えてみよう。

$$\rho = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(\theta, \phi) \exp(jkd \cdot \alpha) \sin \theta d\phi d\theta}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} G(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta} \quad (10)$$

ここで、ベクトル \mathbf{d} はアンテナ 1 を基準としたアンテナ 2 方向の距離ベクトル ($d=|\mathbf{d}|$)、 $\boldsymbol{\alpha}$ は方向 (θ, ϕ) を向く単位ベクトルである。無指向性アンテナ ($G=1$) のアンテナパターン相関は次式になる[4]。一般には複素数であるが、この場合は実数になり、かつ、方向依存性も無い。

$$\rho(d) = \frac{\sin(kd)}{kd} \quad (11)$$

自己パターン($d=0$)との相関を 1 となるよう正規化しているので、アンテナパターン間の相関行列 \mathbf{R} は次式となる。

$$\mathbf{R}(d) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(d) \\ \rho(d) & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

この相関行列は以下の二つの固有値 λ_1, λ_2 と、それぞれの固有値に属する固有ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をもつ。

$$\lambda_1 = 1 + \rho, \quad \mathbf{e}_1 = (1, 1) / \sqrt{2} \quad (13a)$$

$$\lambda_2 = 1 - \rho, \quad \mathbf{e}_2 = (1, -1) / \sqrt{2} \quad (13b)$$

この二つの固有値の意味を考える。固有ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が、固有値 λ_1, λ_2 を生み出している。図 4 に二つのアンテナ構成を示す。この二つのアンテナは \mathbf{e}_1 のウェイトと \mathbf{e}_2 のウェイトにしたアンテナでパターンが直交している。すなわち、同図のように二つのアンテナが間隔 d で配置された場合には、相関の有無に係わらず同相給電(a)と逆相給電(b)の二つが直交パターンを実現する構成になると言っているのである。固有値 λ_1 は同図(a)の同相給電アレーの全空間への放射電力に、固有値 λ_2 は同図(b)の逆相給電アレーの全空間への放射電力に比例する量になる。本レポートで対象としているアンテナは、同図(a)、すなわち、固有値 λ_1 が現れる世界である。アンテナの放射電力を一定に保つため (=エネルギー保存則を満たすため) には、重ねあわせで得られた電界強度の二乗値 (に比例する量) を固有値 λ_1 で正規化しなければいけないということになる。これは、すなわち、方法 2 で得た式(7)そのものである。ちなみに、図 4 (b)のアンテナの場合は、逆相で重ね合わせた後、固有値 λ_2 で正規化すればよいということである ($d=0$ では0/0になり意味を持たないが、漸近値としては成立する)。

この議論により、方法 6 で求めるアンテナ利得は方法 2 に同じである。

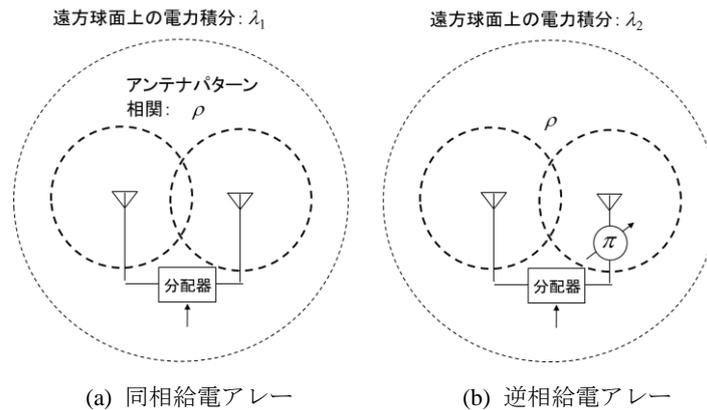


図4 合成アンテナパターンが直交する2つのアレー

4. 定量的な議論をするためには

ここでは、実体が無い仮想的なアンテナである無指向性アンテナについての思考実験であったので、それを検証する物理的な手段は無い（前提②、③の妥当性）。一方、素子アンテナが半波長ダイポールアンテナのように具体的に定められれば、理論・実験の両面からの評価が可能になる。その場合のいずれのアプローチによっても、前提③は否定され、相互結合（素子間カップリング）を認めざるを得ない。理論解析では、半波長ダイポールアンテナの入力インピーダンスが求められていて（例えば[3]の5.4.4項）、 $d=0$ では、単体の場合の2倍になる。これは、方法5の論理と符合している。実測ベースの評価については、文献[5]において、アレーアンテナの素子間結合を結合行列で求めている。それによると、4素子アレーの場合であるが、素子アンテナのパターンは間隔が狭くなるに従い左右に向く（＝相手と反対方向に向く）傾向が現れており（図5）、方法4の推論もありえそうな気がしてくる。

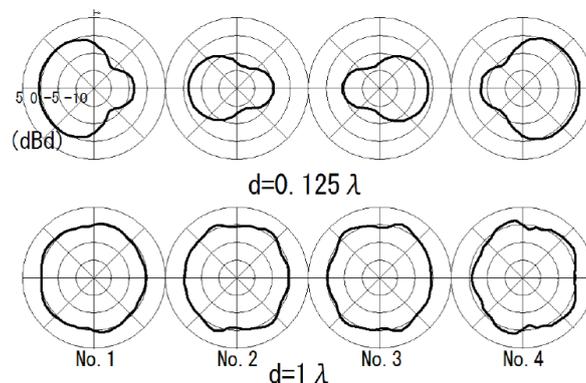


図5 4素子スリブアンテナ（半波長ダイポールアレー）の素子間隔を $d=1/8$ 波長と1波長にした場合の各素子放射パターン（垂直ダイポールアンテナの水平面放射パターン：測定の詳細は[5]）

以上、あれこれと悩みながら、長々といろいろな方法での利得の求め方（考え方）を述べたが、本レポートでは、総合的な意味で、方法5と方法6のサポートもあり、方法2で求めるのが無難であると結論したい。そして、それは、アンテナ利得の求め方を理解している誰もが行う普通の方法に落ちてしまったということになる。ただし、方法4での推論や図5に見られるような素子パターンの具体的な変化が考慮に入っていないので、すっきりとした決着までにはまだ道半ばである。

アレーアンテナの素子間相関については、それが、マルチパス環境での利用であれば、到来角度広がりや空間相関という形の純粋な電波伝搬問題として最初に現れてくる [4]。さらにアンテナ間隔を狭めてくるとアンテナ結合問題（アンテナパターン相関）が重なり、本資料で議論したようなややこしい世界になる。

謝辞 本内容について、同志社大学岩井誠人氏、電気興業（株）大島一郎氏、電気通信大学安藤芳晃氏から有益なコメントをいただいた。謹んで感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] 唐沢好男, 電磁気学のからくり (第9章), Open access book, YK-061, 2021.05.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-061_EM_Wonderland.pdf
- [2] 唐沢好男, 無線通信物理層技術へのアプローチ (第2章), コロナ社, 2021.07.
- [3] 長谷部望, 電波工学 (改訂版), コロナ社, 2005.
- [4] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [5] 大島一郎他, “放射パターン測定に基づくアンテナ素子間結合特性,” 電興技報, No. 42, pp. 7-12, 2008.11.
<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/housha-pata-n.pdf>

読者の皆さんへ

このレポートには以下の続編2編があります。

YK-063 近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_063_Array_Antenna_Gain.pdf

YK-068 近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について [II]

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_068_Array_Antenna_Gain_Part_II.pdf