

近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について（改訂版）

～その奥に潜むからくりを探る～

唐沢好男

配列素子が近接するアレーアンテナの特性に関しては、数多のアンテナ研究者によって理論・実験の両面から調べつくされていて、いまさら何をというのが正直なところであろう。確かに、特性そのものについてはそうであろうが、なぜそうなるかということについては、視点を変えてみれば、知見も深まるだろうと考える。前レポート（YK-062 [1]）では、空想上のアンテナである無指向性アンテナを素子とするアレーアンテナの利得について堂々巡りの議論に陥ってしまったが、本レポートでは、特性が理論的に明らかにされている半波長ダイポールアンテナでその解析を行い、アレーアンテナ利得のからくりに迫ってみたい。

なお、本レポートの初版（YK-063）は2021年9月に作成して公開したが、筆者がその後に得た知見に基づき、改訂版（YK-063_rev）として、今回、大幅に書き換えている。さらに、ここでの結果を踏まえ、アレーアンテナのウェイトを制御して最大利得を実現する方法についての続編（YK-068 [2]）も、本レポートと整合するよう改訂している。

1. アレーアンテナの利得にみる不可思議

極座標表示で表される十分に遠方の地点 (r, θ, ϕ) でのアンテナの放射電界を $E(r, \theta, \phi)$ と表すと、アンテナ指向性利得が次式のように定められる。

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E(r, \theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \right) \quad (1)$$

指向性利得 D が距離 r の関数でないのは、 r が十分大きい地点、すなわち、アンテナからの電波が平面波として届く距離では、 D は距離に依存しなくなるためである。この指向性利得の角度特性はアンテナ放射パターンとも呼ばれる。

実際のアンテナは、内部で吸収されたり入力ポートに反射されて戻ってきたりして、入力した電力の全部が空間に出てゆくわけではない。そのため、効率 $\eta (\leq 1)$ を用いて、アンテナ利得 G を次式のように定める。

$$G(\theta, \phi) = \eta D(\theta, \phi) \quad (2)$$

効率が $\eta=1$ のとき、 $G=D$ であり、空間に放射される全電力はアンテナ入力電力に等しい、というエネルギー保存則を満たしている。 E が全方向で一定のとき、 $D(\theta, \phi)=1$ であり、この特性を持つアンテナは無指向性アンテナと呼ばれる。

受信アンテナ利得 G_r と送信アンテナ利得 G_t は等しいという送受可逆性がある。本レポートでは、送信アンテナとしての利得に着目し、 $\eta=1$ を前提とする指向性利得 D を扱う。

図1に示す無指向性アンテナの同相給電2素子アレーで、アレーの正面方向（ベースラインに直角な方向）の十分遠方点での受信を考えてみよう。素子間隔 d が波長に比べて十分大きい場合、単一の無指向性アンテナ（同図左）の電界強度を E_0 とすると、2素子アレーでの電界強度は、素子ごとに $E_0/\sqrt{2}$ であるので、 $\sqrt{2}E_0$ になる。この方向に対するアンテナの指向性利得は $D=2$ 、すなわち3dBiである。この構成で、素子間隔 d を狭くしてゆくと、アンテナ利得はどうなるであろうかというのが、本レポートのテーマである。

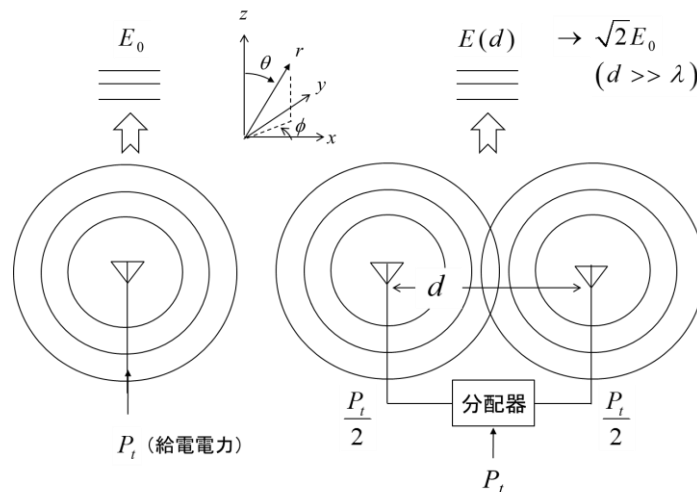


図1 無指向性アンテナを素子（左）とする2素子アレー（右）（送信アンテナ）

（図で、 z 軸方向を $\theta=0$ 、アレーのベースラインを x 軸方向にとり $\phi=0$ とする）

もし、狭くしていってもお互いのアンテナに何も影響が無いなら、 $D=2$ のまま変わらないはずである。しかし、それだと、 $d=0$ においては正面方向ばかりでなく全方向に対して $D=2$ となり、アンテナ供給電力の2倍の電力が空間に放出されるという不合理が起きる。すなわち、エネルギー保存則が成り立たっていない。これは、前提とした「お互いのアンテナに何も影響が無い」が誤りで、素子アンテナを近づければお互いの影響が及んでカップリング効果が必ず現れるということの意味している。無指向性アンテナは実体のない仮想的なアンテナであるのに、そんなアンテナにもカップリングがあるということになる。無指向性アンテナを相手にしては、この疑問に答える定量的な議論ができそうも無い。

ちなみに、素子アンテナのパターン同士にはカップリングが無く、そのまま足しあわせられるとすると、無指向性アンテナ2素子アレーの任意方向 (θ, ϕ) の遠方一定距離地点（座標系は図1、あるいは、後述する図8）での電界強度は次式になる。

$$E(\theta, \phi) \propto |1 + \exp(jkd \sin \theta \cos \phi)| \quad (k = 2\pi / \lambda) \quad (3)$$

アンテナ利得の定義式(1)に従って、利得を求めると次式になる（導出はお任せ）。

$$D(\theta, \phi) = \frac{2 \cos^2 \left(\frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi \right)}{1 + \frac{\sin(kd)}{kd}} \quad (4a)$$

(1)式の分母が、エネルギー保存則を満たすための正規化ファクタになる。目的とする正面方向 $(\theta=0)$ の利得は次式になる。

$$D(\theta=0) = \frac{2}{1 + \frac{\sin(kd)}{kd}} \quad (4b)$$

図2にこの計算結果を示す。同図には、結合がない場合の $D=2$ も点線で示している。式(4b)によって求められる利得は、 $d \gg \lambda$ (λ : 波長) で $D \rightarrow 2$ 、 $d \rightarrow 0$ で $D \rightarrow 1$ となり、上述のエネルギー保存則の破綻は解消され、一見合理的ではある。

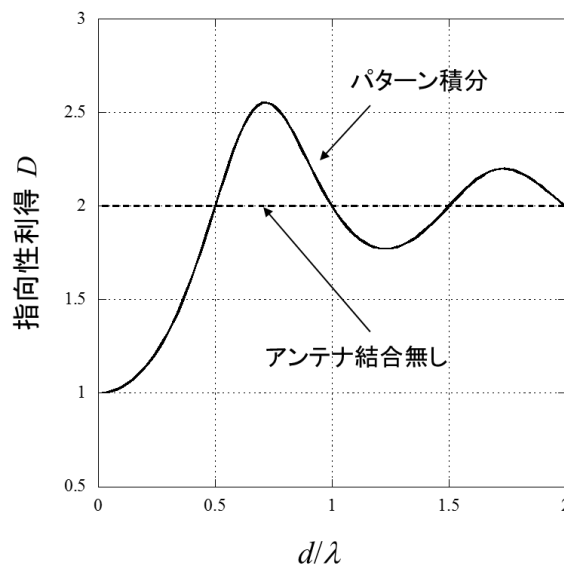


図2 無指向性アンテナの2素子同相合成アレーの利得（二つの考え方による比較）

【注：本図以降の全図に対して縦軸のアンテナ利得はdB値で無く真値】

この考察によって分かったことは、

- ①カップリングの影響がないと言う仮定は成り立たない (=カップリングは必ずある)
- ②素子アンテナの指向性パターンが変わらないとして、これを合成した電界強度から、式(1)によりアンテナ利得を求めると、一見、合理的に見える結果 ($d \rightarrow 0$ で $D \rightarrow 1$) が得られる。

では、②の算定は正しいのだろうか？①でカップリングが無いとするのは成り立たないと言いながら、パターン計算にはカップリングを考慮しないパターンを用いているが、それは問題ないのだろうか。この疑問 (不可思議) が本レポートの出発点である。次章で、このもやもやした気持ちを払拭させたい。

2. 半波長ダイポールアレーで考えてみよう

上述のとおり、無指向性アンテナは実体がない架空のアンテナなので定量的な議論ができない。そこで、動作が理論的に解明されている半波長ダイポールアンテナについて、詳細な分析をしてみたい。

2. 1 半波長ダイポールアンテナの基本特性

起電力法を用いた理論解析によって、半波長ダイポールアンテナ (ダイポールの向きをz軸；波長に比べて十分細い導線) では、以下の性質が明らかにされている[3]。

- ・ 電流分布 $I = I_0 \sin k \left(\frac{\lambda}{4} - |z| \right) \quad \left(0 < |z| \leq \frac{\lambda}{4} \right)$ (5)

- ・ 入力インピーダンス $Z_{11} (= R_{11} + jX_{11}) = 73.13 + j42.55 \text{ } [\Omega]$ (6)

- ・ 遠方界 $E = j60I_0 \frac{e^{-jkr} \cos((\pi/2)\cos\theta)}{r \sin\theta}$ (7)

- ・ 指向性利得 $D = \frac{\cos^2((\pi/2)\cos\theta)}{\sin^2\theta} D_{HDP}$ (8a)

$$\text{最大利得 } (\theta = \pi/2 \text{ 方向}) \quad D_{HDP} = 1.64 \quad (= 2.15 \text{ dBi}) \quad (8b)$$

さらに、2本の半波長ダイポールアンテナが間隔 d で横に平行に置かれたとき、アンテナが相互に結合して、以下の相互インピーダンス ($Z_{12} = R_{12} + jX_{12}$) を持つ。

$$R_{12}(d) = 30 \left[2C_i(kd) - C_i \left\{ k \left(r' + \frac{\lambda}{2} \right) \right\} - C_i \left\{ k \left(r' - \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \right] \quad (9a)$$

$$X_{12}(d) = 30 \left[-2S_i(kd) + S_i \left\{ k \left(r' + \frac{\lambda}{2} \right) \right\} + S_i \left\{ k \left(r' - \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \right] \quad (9b)$$

$$r' = \sqrt{d^2 + \lambda^2 / 4}$$

ここで、 C_i は余弦積分関数、 S_i は正弦積分関数である。 $d=0$ における相互インピーダンスは $R_{12}(0)=73.13, X_{12}(0)=42.55$ となり、単体アンテナの入力インピーダンスと等しくなる。 C_i, S_i は特殊関数で簡単に計算できないので、計算結果を図3に示す。

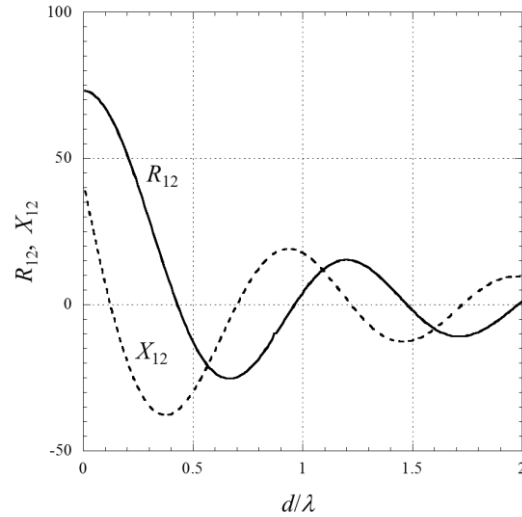


図3 半波長ダイポールアンテナ間の相互インピーダンス

式(7)より、半波長ダイポールアンテナの放射電磁界は電流 I_0 によって決まり、アンテナへの入力電力（供給電力）とは関係ないように見える。放射に寄与する抵抗分（放射抵抗）を R_i とすると、アンテナへの供給電力 P_i は

$$P_i = \frac{1}{2} I_0^2 R_i \quad (10)$$

であり、遠方点での電力密度 p_r は、電界および磁界を $E_0 e^{j\omega t}$ 、 $H_0 e^{j\omega t}$ 、自由空間の固有インピーダンスを $Z_0 (=377 [\Omega])$ とすると、

$$p_r = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2Z_0} \left(\frac{60I_0}{r} \right)^2 \quad (11)$$

となる。エネルギー保存則（あるいはフリスの伝達公式）から、効率 $\eta=1$ のアンテナにおいては、 P_i と p_r は次式で結ばれねばならない。

$$\frac{P_i D_{HDP}}{4\pi r^2} = p_r \quad (12)$$

この式からアンテナの放射抵抗 R_t を求めると 73.13Ω となり、式(6)の R_{11} に等しくなる。式(6)においては、 R_{11} を含むアンテナインピーダンス Z_{11} は導線近傍の電磁界解析（起電力法）によって求められたものであるが、式(12)の要請と辻褃が合っている。理論とはそうなるべきものと言ってしまえば実も蓋もないが、見事である。図4はこの仕組みをまとめている。

今後の議論において重要なことを一言でまとめると、遠方電磁界はアンテナに流れる電流によって決まる、ということである。

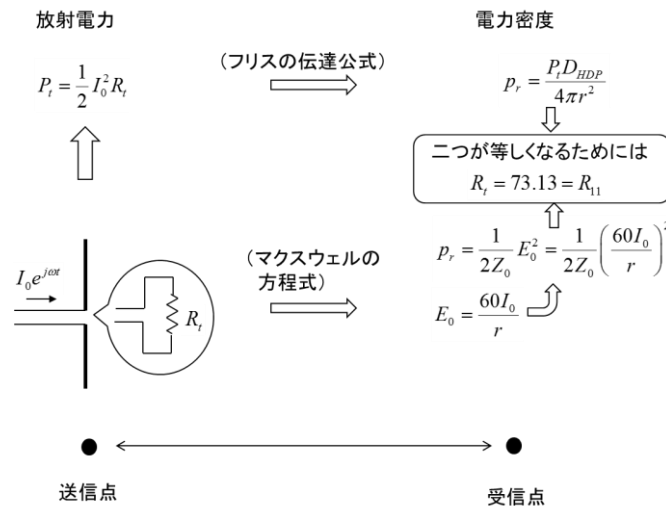


図4 半波長ダイポールアンテナからの放射に関する電流・電界強度・放射電力・電力密度の関係

2. 2 近接配置のアレーアンテナ利得

(1) 2素子同相給電ブロードサイドアレー

半波長ダイポールアンテナの特性を使って、間隔 d が0に近づく場合の利得変化を調べてみよう。まずは最も基本の2素子同相給電ブロードサイドアレー（図5のフェーズドアレー構成で、 $\psi=0$ の場合）とする。ダイポールを z 軸方向に、配置を x 軸上に間隔 d 開けて置き、 y 軸方向（ $\theta=\phi=\pi/2$ 方向）の利得を考える。

素子1にかける電圧を V_1 、電流を I_1 、素子2も同様に V_2 、 I_2 とする。間隔 d が狭くなると相互インピーダンスの影響が現れ、二つのアンテナポートの電圧と電流の関係は次式で表される。

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}(d)I_2 \tag{13a}$$

$$V_2 = Z_{21}(d)I_1 + Z_{22}I_2 \quad (\text{ただし、} Z_{21}=Z_{12}, Z_{22}=Z_{11}) \tag{13b}$$

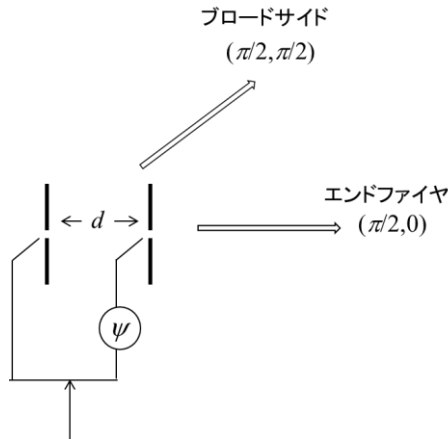


図5 半波長ダイポールアンテナによるフェーズドアレー

このケースでは、 $I_1=I_2$ であるので、素子アンテナの入力インピーダンスの抵抗分(実数分) R_{in} は、二つの素子共に次式で与えられる。

$$R_{in}(d) = R_{11} + R_{12}(d) \quad (14)$$

間隔 d が0に近づくと、 R_{12} は R_{11} に漸近し、結果として、抵抗分は大きくなるのが分かる($d \rightarrow 0$ で $R_{in} \rightarrow 2R_{11}$)。式(10)に示したように、送信電力を一定に保つためには、この抵抗分の変化によって I_0^2 を反比例させ、その結果として、式(11)のように受信点での電力密度が I_0^2 に比例するように決まる。結合が無い十分大きな間隔のときに比べて受信点周囲の電力密度は R_{11}/R_{in} の比率で変化し、 d が0付近では利得も下がることになる。ゆえに、このケースにおけるアレー利得 ($D(\theta, \phi; d, \psi)$ で表記) は次式で算定できるはずである。

$$D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; d, 0\right) = 2 \frac{R_{11}}{R_{11} + R_{12}(d)} D_{HDP} \quad (15)$$

一方、遠方の電界強度を、素子パターンを維持したまま、素子間の空間位相差のみを考慮して合成すると次式である。

$$E(\theta, \phi) \propto f(\theta, \phi) \{1 + \exp(jkd \sin \theta \cos \phi)\} \quad (16)$$

式中の $f(\theta, \phi)$ は素子アンテナの電界次元での放射パターンである。また、右辺の $\{ \}$ 内の項は、アンテナの配置のみによって決まる量であるのでアレーファクタと呼ばれる。これを式(1)に代入することにより、指向性利得を求めることができる。この二つの方法によって求めた利得 ($\theta = \phi = \pi/2$ 方向の) を図6に示す。(注: 図には、次項で述べる $\psi = \pi/4$ のケースも一緒に載せているがそれについては後述する)。図より、二つの計算方法によって求めた利得は完全に一致していることが分かる。

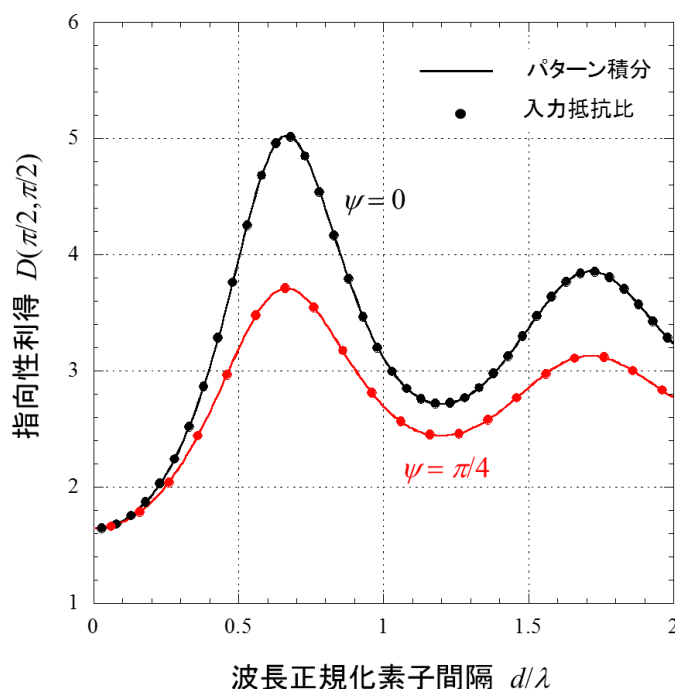


図6 2素子半波長ダイポールアレーのブロードサイド方向指向性利得の素子間隔依存性（2つの計算方法（パターン積分と入力抵抗比）の結果を比較； $\psi=\pi/4$ のケースについては次項（2）で説明）

これによって、1章で述べた不可思議は、以下のようにまとめることができるであろう

- ① アンテナ間隔を近づけると、素子アンテナ同士が相互結合しアンテナの入力インピーダンスが変化する。（同相給電の場合は、 $d \rightarrow 0$ で、インピーダンスの抵抗分は2倍に近づく）
- ② アンテナへの供給電力を一定とし、そのすべてが放射されるとすると、アンテナに流れる電流は、インピーダンスの変化に応じて変化する。（同相給電の場合は、 $d \rightarrow 0$ で、電流の大きさは $(1/\sqrt{2})$ 倍に近づく）
- ③ 受信点での電界強度は、アンテナに流れる電流の大きさに比例する。（同相給電の場合は、 $d \rightarrow 0$ で、電界強度は $(1/\sqrt{2})$ 倍に近づく）
- ④ ゆえに、結合が無いときのアンテナ利得が $2D_{HDP}$ であるのに対して、間隔 d を0に近づけてゆくと電界強度の二乗に比例して変化する、 $d=0$ 付近においては、素子単体の利得である D_{HDP} に漸近する
- ⑤ この結果は、素子パターンは変化しないという仮定で求められる利得の計算式（アレーファクタを用いた利得計算式(1)）の結果と完全に一致する。

上記⑤より、1章の最終パラグラフで提示した疑問は、そのようにして問題ないという結論を得たことになる。ただし、それが一般的に言えるのかという追い討ち的な疑問も沸くと思うので、さらにいくつかのケースで確認してみたい。

(2) 任意位相のフェーズドアレーアンテナ

上記(1)のケースをもう少し一般化するために、図5のアレー構成で、任意の位相 ψ を与えてみたい。 $I_2=I_1e^{j\psi}$ であるので、式(13)で表される電圧と電流の関係は次式となる。

$$\begin{aligned} V_1 &= \{Z_{11} + e^{j\psi} Z_{12}(d)\} I_1 \\ &= [R_{11} + \cos\psi R_{12}(d) - \sin\psi X_{12}(d) + j\{X_{11} + \sin\psi R_{12}(d) + \cos\psi X_{12}(d)\}] I_1 \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{e^{-j\psi} Z_{12}(d) + Z_{11}\} I_2 \\ &= [R_{11} + \cos\psi R_{12}(d) + \sin\psi X_{12}(d) + j\{X_{11} - \sin\psi R_{12}(d) + \cos\psi X_{12}(d)\}] I_2 \quad (17b) \end{aligned}$$

このアンテナから放射される全電力 P_t は、上式の抵抗分に着目し

$$P_t = \{R_{11} + \cos\psi R_{12}(d)\} I_1^2 \quad (18)$$

である。(注：接近している場合は素子同士が結合しており、アンテナから放射される全電力のみに意味があるのであって、素子毎の電力の議論をここではしない)。(1)での議論と同様に、結合が無いときの利得に比べて $R_{11}/\{R_{11} + \cos\psi R_{12}(d)\}$ 倍になることになり、

$$D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; d, \psi\right) = 2 \frac{R_{11}}{R_{11} + \cos\psi R_{12}(d)} \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) D_{HDP} \quad (19)$$

と算定される。位相量 $\psi=\pi/4$ とした場合の結果を前述の図6に示している。この場合も、積分で求めるアンテナ利得と完全に一致し、前項(1)の⑤と同じ結論になっている。

(3) 2素子逆相給電エンドファイヤアレー

2素子アレーにおいて、素子間隔変化に対する利得変化のメカニズムは前項(2)の例で十分であろう。ここでは、結果が面白いと言う意味で、この例を加える。

図5で $\psi=\pi$ (逆相給電)とし、利得を見る方向をアレーのライン方向(x軸方向; エンドファイヤアレー)とする。入力抵抗 R_{in} は $R_{11}-R_{12}(d)$ であり、この場合は $d\rightarrow 0$ で $R_{in}\rightarrow 0$ になることである。角度 $\theta=\pi/2$, $\phi=0$ 方向の利得は次式である。

$$D\left(\frac{\pi}{2}, 0; d, \pi\right) = 2 \frac{R_{11}}{R_{11} - R_{12}(d)} \sin^2\left(\frac{kd}{2}\right) D_{HDP} \quad (20)$$

図7はアンテナ利得の式(1)を使ってアンテナパターン積分で求めたものと、式(20)で計算したものを比較している。当然ながら、この場合も両手法は完全に一致している。興味深いのは $d\rightarrow 0$ での利得の変化である。素子間隔 $d/\lambda=0.5$ では、受信点で見て同相合成になるので利得が高いことが理解できるが、そこから距離を狭めてゆくと逆相合成に近づき、利得は下がるはずと思うであろう。でも、結果はそうはならない。なぜだろうか？

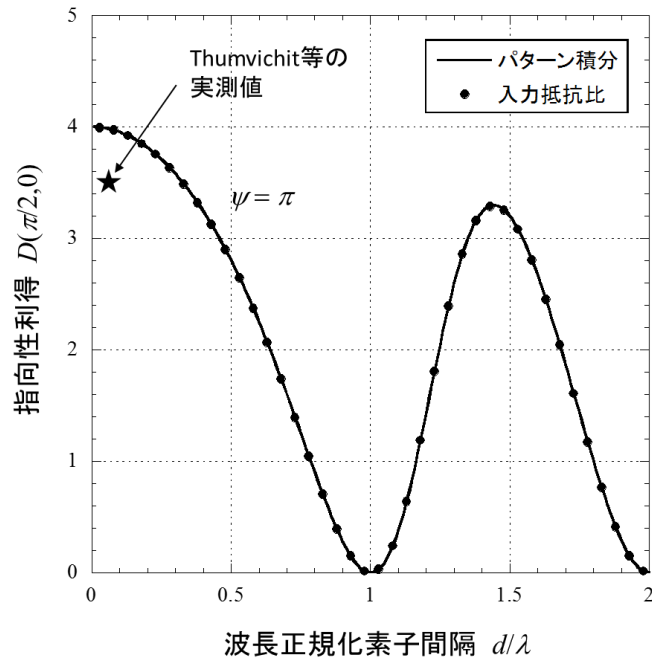


図7 半波長ダイポール逆相給電エンドファイアアレーの利得のアンテナ間隔依存性

(★ : A. Thumvichit, T. Takano他, IEEE Trans. Antennas. Propagat., vol. 55, no. 1, 2007.)

$d=0$ 付近では、当該方向に対しては電界が打ち消されて利得が下がる要因になるのは事実である。しかし、一方で、インピーダンスが0に近づき、電流値を大きく上げる動作になっていて、これは受信点の電界強度を上げる働きをする。後者が強く働き $d=0$ 付近に高い利得を得ているのである。 x 軸方向から見れば、打消しの度合いは他の方向よりは弱く、かつ、給電回路のインピーダンスを整合させて給電電力は空間に送り出しているのだから、この方向に利得が取れているわけである。

図7のケースは完全導体反射板上にダイポールアンテナを $d/2$ 離して置いた場合に相当する(ただし、反射板では片面照射なので利得は2倍(3dB)高い)。文献[4]では、反射板上に半波長アンテナを $\lambda/30$ の間隔に近づけ、給電部を工夫してインピーダンスを整合させ、利得8.4dBiが得られることを実証している。図7中の★はこの結果を本図の構成に換算してプロットしている。図7における当該間隔($d=(1/15)\lambda$)での利得算定値は約4(=6dBi)であるが、反射板型にすることにより約3dB上がって9dBiになることを考慮すると、実測値8.4dBiとは辻褃の合う結果になっている。

(4) 多素子アレー

以上、近接配置の2素子アレーについて詳細に検討してきた。その結果、アレー利得は、「素子アンテナパターン」×「アレーファクタ」で求めたアレーパターンを式(1)の定義式に入れて求めてよいことを明らかにすることができた。では、より多素子のアレーでもそのよ

うにしてよいのかと言う疑問が湧くであろう。ここでは、これを考えてみたい。

2素子の場合は、構造の対称性からフェーズドアレーアンテナにおいては $|I_1|=|I_2|$ を当然のこととして受け入れてきた。しかし、3素子以上になると入力インピーダンスが素子ごとに異なってくるので、アンテナ電流の強度を素子ごとに等しいとする仮定は必ずしも一般的ではない。これは、給電をどうしたいかという考え方の問題になり、一般論を語るのは難しいように思う。ここでは、最もシンプルなケースとして、 N 素子 ($N \geq 3$) の等間隔リニアアレーで、同相給電のブロードサイド方向の利得を調べる。

次の二つの前提条件を課してみよう。

- ① 全供給電力が空間に放出されるよう給電回路との整合がなされている
- ② 各素子への入力電流を等しくする

条件①は、アンテナ効率を1とするためであり、本レポート全体を通しての共通条件である。条件②はいろいろ考えられる設定条件の中の一つを選んだと言うことと理解してほしい。(こう仮定した理由は最後に述べる)

N 素子半波長ダイポール等間隔リニアアレーのインピーダンス行列 \mathbf{Z} は以下のように表されるものとする。

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12}(d) & \cdots & Z_{12}\{(N-1)d\} \\ Z_{12}(d) & Z_{11} & \cdots & Z_{12}\{(N-2)d\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{12}\{(N-1)d\} & Z_{12}\{(N-2)d\} & \cdots & Z_{11} \end{pmatrix} \quad (21)$$

同相給電において、ブロードサイド方向 ($\theta=\phi=\pi/2$ 方向) のアンテナ利得は、これまでの議論によって、アンテナインピーダンスを用いて以下のように表される。

$$D\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; d, 0\right) = \frac{N^2 R_{11}}{NR_{11} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) R_{12}(id)} D_{HDP} \quad (22)$$

$N=3$ と4の場合について、式(22)による計算結果と、アレーファクタを用いたアンテナパターンから式(1)による積分計算の結果を図8に示す。同図より、それぞれの結果は、二つの計算方法で完全に一致していることが分かる。このことより、近接配置の多素子アレーアンテナにおいても、アレーファクタでのパターンを用いた(1)式での計算でよいということが言えそうである。

二つの利得計算法による結果が等しくなったのは、②の仮定のお陰であり、②を選択した理由でもある。②に代わる条件としては、各素子への供給電力を等しくするとか、入力電圧を等しくするとか、いろいろ考えられる。その場合には、素子ごとのパターンが変わってしまうので、単純なアレーファクタによる利得計算値 (式(1)による) とは違ってくるであろう。

う。繰り返すが、これはやり方があっているとか間違っているとかの話ではなく、入力インピーダンスの異なる素子アンテナにどう給電するかという考え方の問題である。この種の問題を論じだすと議論百出で収拾がつかなくなる恐れがある。そうならないためにも、前提にする考え方を共通にしてから議論を始めると良いと思う。

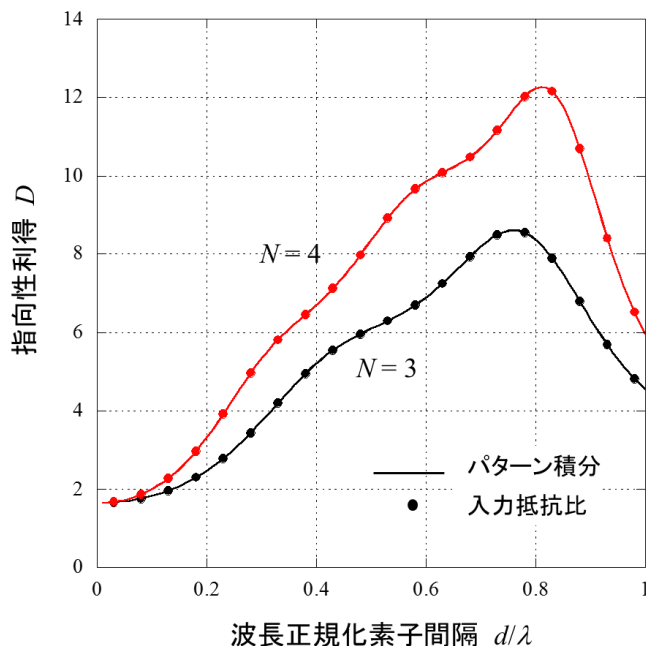


図8 3素子および4素子同相給電半波長ダイポールアレーのブロードサイド方向の利得
(指向性パターン積分と入力抵抗比を用いた計算結果との比較)

3. アレーアンテナの指向性利得の具体的な計算法

3. 1 アレーアンテナ利得の基本式

第2章において、アレーアンテナの放射パターンは、素子間隔が狭い場合でも、素子アンテナの放射パターンとアレーファクタの積で表されること、アレーアンテナの利得は、その放射パターンを(1)式に入れて求めてよいことの根拠を述べた。ただし、その計算が成立する条件は、同相給電の場合に、各素子への入力電流が同じになるように給電調整がなされる時である。

以下、特性が同じ素子アンテナを同じ向きに配列するアレーアンテナを任意ウェイトで制御するときの利得を考える。ここでは、 N 個の素子アンテナを直線状に配列するリニアアレーとする。その座標と配置を図9に示す。

図の x 軸上の x_i ($i=1, 2, \dots, N$)の地点に電界指向性 $f(\theta, \phi)$ の素子アンテナを置く。方向を示す単位ベクトルを α とすると、次式で表される。

$$\alpha = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (23)$$

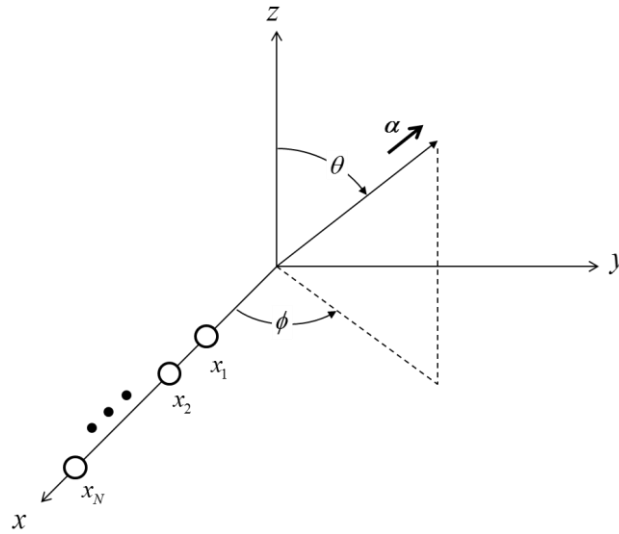


図9 アレーアンテナの構成と座標系（ダイポール素子の向きはz方向）

式中の i, j, k は座標軸 x, y, z 方向に対する単位ベクトルである。このとき、方向 α に対する i 番目のアンテナ素子から放射される電波の位相 φ_i は、 $x=0$ 位置の位相を基準として、

$$\varphi_i = kx_i \mathbf{i} \cdot \boldsymbol{\alpha} = kx_i \sin \theta \cos \phi \quad (24)$$

となるので、アレーアンテナの伝搬ベクトル（アレー応答ベクトル） \mathbf{v} は次式である（式中の上付き文字Tは転置を表す）。

$$\mathbf{v} \equiv (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_N)^T \quad v_i = \exp(j\varphi_i) \quad (25)$$

アレー素子に対するウェイトベクトル \mathbf{w} を次式で与える。

$$\mathbf{w} \equiv (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N)^T \quad \|\mathbf{w}\| \equiv \sqrt{\mathbf{w}^H \mathbf{w}} = 1 \quad (26)$$

式中の上付き文字Hは複素共役転置を表す。ウェイトベクトルのノルムを1にしているのは、送信電力を一定に抑えるための条件であるが、アンテナ利得を議論する場合、あるいは受信アンテナで考える場合には、このノルム制約条件は必須なものではない。

このとき、アレーアンテナの放射電界 E は次式で表される。

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= f(\theta, \phi) \sum_{i=1}^N w_i \exp(jkx_i \sin \theta \cos \phi) \\ &= f(\theta, \phi) \mathbf{w}^T \mathbf{v}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $f(\theta, \phi)$ は素子アンテナの電界指向性（複素数）である。(27)式右辺の、 $f(\theta, \phi)$ を除いた部分はアレーの構成によってのみ決まるアレーファクタである。

アレーアンテナの (θ_0, ϕ_0) 方向に対する利得 $D(\theta_0, \phi_0)$ は(1)式を(27)式のベクトルや行列で表すと次式になる。

$$\begin{aligned}
 D(\theta_0, \phi_0) &= \frac{|f(\theta_0, \phi_0)|^2 \mathbf{w}^T \mathbf{v}(\theta_0, \phi_0) \mathbf{v}^H(\theta_0, \phi_0) \mathbf{w}^*}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \mathbf{w}^T \mathbf{v}(\theta, \phi) \mathbf{v}^H(\theta, \phi) \mathbf{w}^* \sin \theta d\theta d\phi} \\
 &= \frac{|f(\theta_0, \phi_0)|^2 \mathbf{w}^T \mathbf{A}(\theta_0, \phi_0) \mathbf{w}^*}{\mathbf{w}^T \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \mathbf{A}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right\} \mathbf{w}^*} \\
 &= \frac{|f(\theta_0, \phi_0)|^2 \mathbf{w}^T \mathbf{A}(\theta_0, \phi_0) \mathbf{w}^*}{\mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w}^*} \tag{28a}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{A}(\theta, \phi) \equiv \mathbf{v}(\theta, \phi) \mathbf{v}^H(\theta, \phi) \equiv \begin{Bmatrix} \ddots & & \\ & a_{lm} & \\ & & \ddots \end{Bmatrix} \tag{28b}$$

$$a_{lm} = \exp[jk(x_l - x_m) \sin \theta \cos \phi] \tag{28c}$$

$$\mathbf{B} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \mathbf{A}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \equiv \begin{Bmatrix} \ddots & & \\ & b_{lm} & \\ & & \ddots \end{Bmatrix} \tag{28d}$$

$$b_{lm} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \exp[jk(x_l - x_m) \sin \theta \cos \phi] \sin \theta d\theta d\phi \tag{28e}$$

ウェイトを定めれば、(28a)式を計算することによってそのときの利得を求めることができる。任意の素子アンテナ指向性パターンに対して、 N 次のエルミート行列 \mathbf{B} の成分は二重積分で表されるが、次節で述べるように、 $f(\theta, \phi)$ の形によっては積分が解けて閉形式で表すことができる。行列成分 b_{lm} は、位置 x_l と x_m 間のアンテナパターンの空間相関と言えるものであり、ここでは、アンテナパターン相関と呼ぶことにする。

3. 2 アンテナパターン相関 b_{lm} の閉形式表現

実際に、式(28a)により結果を得たい場合、式(28e)の二重積分が解けて閉形式表されると都合が良い。以下では、閉形式で表される $f(\theta, \phi)$ の形について示す。

(1) 無指向性アンテナの場合

無指向性アンテナでは、 $|f(\theta, \phi)|^2=1$ であり、これは容易に解けて次式になる。

$$b_{lm} = \frac{\sin(kx_{lm})}{kx_{lm}} \quad x_{lm} \equiv x_l - x_m \quad (29)$$

(2) 微小ダイポールアンテナの場合

微小ダイポールアンテナでは $|f(\theta, \phi)|^2=\sin^2\theta$ である。この場合は、[5]により、以下の結果が得られている。

$$b_{lm} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{\sin(kx_{lm})}{kx_{lm}} \left(1 - \frac{1}{(kx_{lm})^2} \right) + \frac{\cos(kx_{lm})}{(kx_{lm})^2} \right\} / D_{SDP} \quad (D_{SDP} = 1.5) \quad (30)$$

(注：この式は3次元空間から到来するマルチパス環境での空間相関を求める目的で導かれたものである[5]。その意味は[6]を、導出の詳細は[5]を見てほしい)。

(3) 電力指向性パターンが $|f(\theta, \phi)|^2=\sin^n\theta$ の場合

上記の二つのケースを含んで一般化したものとして、 $|f(\theta, \phi)|^2=\sin^n\theta$ についても解けている[7]。指数 n は指向性のシャープさを表すパラメータである。これも上記同様、3次元空間から到来するマルチパス環境での空間相関を求める目的で導かれたものである。マルチパスの平均電力到来角度プロファイルを $\Omega(\theta, \phi)$ 、 x 軸方向の距離差を Δx とすると、空間相関 ρ は次式で表される[6]。

$$\rho(\Delta x) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Omega(\theta, \phi) \exp(jk\Delta x \sin\theta \cos\phi) \sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Omega(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} \quad (31)$$

この式の $\Omega(\theta, \phi)$ を $|f(\theta, \phi)|^2$ に、 d を x_{lm} に置き換えると、(31)式右辺の分子は $4\pi b_{lm}$ になる。 $|f(\theta, \phi)|^2 = \sin^n\theta$ のとき(31)式の積分は解けて次式になる。(式中の ${}_1F_2$ は超幾何関数。導出はかなり煩雑であり、その詳細は[7]を見てほしい)。

$$\rho(\Delta x) = {}_1F_2 \left(\frac{n+2}{2}; 1, \frac{n+3}{2}; -\frac{(k\Delta x)^2}{4} \right) \quad (|f(\theta, \phi)|^2 = \sin^n\theta) \quad (32)$$

(31)式右辺の分母は

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^{n+1} \theta d\theta d\phi = 2\pi\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = 4\pi / D_0(n) \quad (33a)$$

$$D_0(n) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (33b)$$

であるので、求めたい b_{lm} は次式となる。

$$b_{lm} = {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}; 1, \frac{n+3}{2}; -\frac{(kx_{lm})^2}{4}\right) / D_0(n) \quad (34)$$

式中の D_0 は $\theta=\pi/2$ 方向(素子アンテナパターンのピーク方向)の指向性利得であり、 $n=0$ (無指向性アンテナ)で $D_0=1$ 、 $n=2$ (微小ダイポールアンテナ)で $D_0=1.5$ になる。当然ながら、(29)式や(30)式は(34)式からも導かれる。また、半波長ダイポールアンテナも $n=2.6$ で精度よく近似できる。行列成分 b_{lm} はアンテナパターン相関と呼んでもよいであろう。

図10は x 軸方向の距離差($x_{lm} \rightarrow d$)を波長で正規化した d/λ に対し、 $n=0, 2, 2.6, \infty$ について(34)式の D_0 を除いた部分の計算結果を示している。半波長ダイポールアンテナの放射電力パターン近似を与える $n=2.6$ は、 $n=2$ との差が無視できる程度に小さいことが分かる。(参考までに、 $n=\infty$ は、平面内一様角度から到来するときの空間相関 $J_0(kd)$ のお馴染みの式になる)

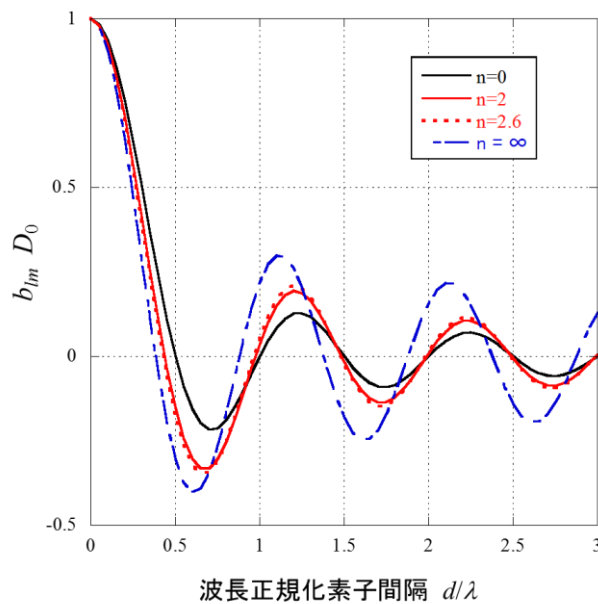


図10 n をパラメータとするアンテナパターン相関 (x 軸方向移動)

(4) 半波長ダイポールアンテナの場合

半波長ダイポールアンテナの放射パターンは式(8a)であるが、 $n=2.6$ で精度良い近似ができる。故に、次式である。

$$b_{lm} \approx {}_1F_2 \left(2.3; 1, 2.8; -\frac{(kx_{lm})^2}{4} \right) / D_{HDP} \quad (D_{HDP} = 1.64) \quad (35a)$$

ただ、専用のソフトがないと計算できない超幾何関数で表されており、実際の計算には不便である。図10でもわかるように、あるいはこの後調べるように、超幾何関数の部分を、 $n=2$ を与える簡易な式(30)を流用しても、問題となる誤差は生じない。故に、次式を推奨する。

$$b_{lm} \approx \frac{3}{2} \left\{ \frac{\sin(kx_{lm})}{kx_{lm}} \left(1 - \frac{1}{(kx_{lm})^2} \right) + \frac{\cos(kx_{lm})}{(kx_{lm})^2} \right\} / D_{HDP} \quad (35b)$$

式(35b)の近似度確認のため、 $d \rightarrow 0$ 付近に最も誤差が現れやすい2素子逆相給電半波長ダイポールエンドファイヤアレー (図7のケース) について、アレーパターンの空間積分 (式(1))、 $n=2.6$ を用いた計算 (式(34)を式(28)に)、 $n=2$ の近似式 (式(35b)) を用いた計算の3つの方法で比較した結果が図11である。同図より、積分法を基準にしたとき、 $n=2.6$ の近似では誤差がまったく見えない程度に一致していること、 $n=2$ の近似では、 $d=0$ 付近に若干の差は見られるものの、ほとんど無視しても良いレベルであることが分かる。半波長ダイポールアンテナの計算においては、簡易な近似式である(35b)式の利用を推奨する根拠である。

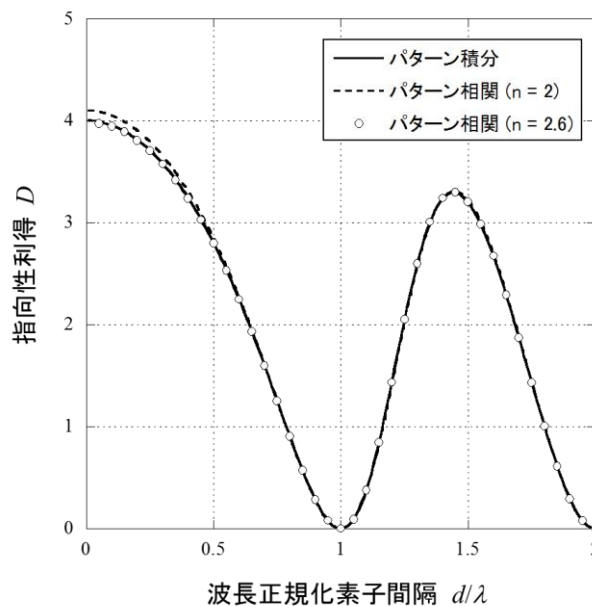


図11 逆相給電2素子半波長ダイポールアレーのエンドファイヤ方向の指向性利得
(3種類の計算法の比較)

4. 本レポートのまとめと続編への誘い

本レポートの第1章においては、素子アンテナ近接配置時のアレーアンテナの利得計算に筆者が感じる不可思議な感覚を述べた。しかしその不可思議は、第2章で述べたように、理論解析ができる半波長ダイポールアンテナで、カップリングによる入力インピーダンスの変化と捉えると、定量的に辻褃の合う説明ができ、一定の納得を得た。また、一般的に用いられているアレーアンテナの指向性パターン（＝素子アンテナパターンとアレーファクタの積）が、近接配置時の利得計算にもそのまま適用できることを述べ、ただし、その場合の給電方法に関する考え方を明確にした。

第3章では、第2章の結果を根拠とし、任意ウェイトに対するアレーアンテナ利得について、アンテナパターンの二重積分部分を閉形式にした簡易な計算法を示している。従来、この部分は無指向性アンテナのみでの結果が示されることが多かったが、電波伝搬の研究分野で導かれている空間相関式を利用することにより、微小ダイポールアンテナや半波長ダイポールアンテナの場合でも簡易な計算が可能であることを示した。

このレポートには続編YK-068[2]がある。続編では、式(28a)の給電ウェイトを最適に制御して最大利得を求める方法をまとめている。その結果として、近接配置時にスーパーゲインアンテナとなる興味ある結果も示している（本稿の図7はそこへの入り口である）。なお、本レポートはYK-063を大幅に書き換えているので、続編も、これと整合するよう書き換えを行ない、YK-068_revとして公開している。

参考文献

- [1] 唐沢好男, “アレーアンテナのパラドックス; 「重ね合わせの理」か「エネルギー保存則」か,” 私報YK-062, 2021.07. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_062_Array_Antenna_Paradox.pdf
- [2] 唐沢好男, “近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について[II] (改訂版),” 私報YK-068_rev, 2022.03. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_068_Array_Antenna_Gain_Part_II.pdf
- [3] 長谷部望, 電波工学 (改訂版), コロナ社, 2005.
- [4] A. Thumvichit, T. Takano, and Y. Kamata, “Characteristics verification of half-wave dipole very close to a conducting plane with excellent impedance matching,” *IEEE Trans. Antennas. Propagat.*, vol. 55, no. 1, pp. 53-58, 2007.
- [5] D. Doncker, “Spatial correlation functions for fields in three-dimensional Rayleigh channels,” *Proc. Electromagn. Res.*, vol. 40, pp.55-69, 2003. [5] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [6] 唐沢好男, (改訂) デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016. (空間相関の説明は5.4.3項、同書の式(5.42)は誤植があり、同式右辺最終項の分母は $kAx \rightarrow (kAx)^2$)
- [7] Y. Wang, H. L. Dang, and Y. Karasawa, “Spatial correlation functions three-dimensional APS with $\cos^n \theta$,” *IEEE Antennas Wireless Propagation Letters*, vol. 11, pp. 511-514, 2012.

読者の皆さんへ

第4章で述べたように、このレポートには以下の続編があります。

YK-068 近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について [II]

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_068_Array_Antenna_Gain_Part_II.pdf

また、以下の私製公開本の第2章でこの問題をまとめています（内容は主に続編の利得最大化問題）

私製Open Access Book, 固有値が開く無線技術の扉、2022.01.

http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_070_Eigenvalue_in_Wireless_World.pdf