Technical Report YK-065
Sept. 10, 2021
Y. Karasawa

電気回路と電磁気学

電気工学の授業では電磁気学と電気回路学を専門基礎科目として学ぶ。電磁気学は電界と磁界の関係を表す４つの法則を連立方程式にしたマクスウェルの方程式と力関係を表すローレンツ力よりなる。一方、電気回路学は抵抗・コンデンサ・コイルよりなる回路の電流と電圧の関係を定める理論である。授業では、それぞれ独立に学ぶことが多いであろうが、電気回路は電磁気学をその理論的根拠としているという意味において密接な関連がある。そこで、本レポートでは、抵抗・コンデンサ・コイルが直列に結ばれる最も基本的な電気回路を取り上げ、その動作を電磁気学的に説明する。この種の試みは多くの電磁気学教科書等でなされているが（例えば[1]）、本レポートの内容は、その入門編に位置づけられる。

１．電気回路と電磁気学

図１に示す抵抗（抵抗値 R [オーム：Ω]）・コンデンサ（キャパシタンス C [ファラド：F]）・コイル（インダクタンス L [ヘンリー：H]）よりなる負荷を、交流電源 V で駆動する回路において、その定常状態を考える。この回路に流れる電流を I とすると、電気回路で学ぶ回路方程式は次式である。

$$V = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int^t Idt \tag{1}$$

角周波数 ω の交流回路では、電流と電圧の関係は複素数表示で以下のように表される。

$$I = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}V \qquad \left(V = V_0 \exp\left(j\omega t\right)\right) \tag{2}$$

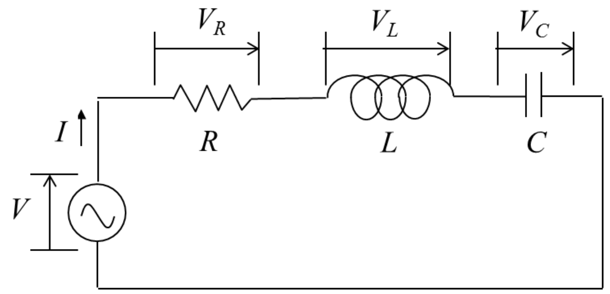

図１　検討の対象とする電気回路

各回路素子にかかる電位差を V_R, V_L, V_C（向きは図の矢印）とすると次式である。

$$V + V_R + V_L + V_C = 0 \tag{3}$$

一方、電磁気学の基本式（マクスウェルの方程式とローレンツ力の式）は次式で与えられる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{（電磁誘導の法則）} \tag{4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \text{（アンペア・マクスウェルの法則）} \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e \quad \text{（電束密度に関するガウスの法則）} \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{（磁束密度に関すガウスの法則）} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad \text{（ローレンツ力）} \tag{8}$$

ここで、$\boldsymbol{E}$：電界[V/m]、$\boldsymbol{D}$：電束密度[C/m^2]、$\boldsymbol{H}$：磁界[A/m]、$\boldsymbol{B}$：磁束密度[T]、$\boldsymbol{F}$：力[N]、$\boldsymbol{i}$：電流密度[A/m^2]、ρ_e：電荷密度[C/m^2]、q：電荷[C]、$\boldsymbol{v}$：物体の速度[m/s]であり、太文字はベクトルである。また、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ は誘電率ε [F/m]、透磁率μ [H/m]を介して、$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ で結ばれる。真空中の誘電率はε_0、透磁率はμ_0 である。なお、ここに示した単位記号では相互の関係がつかみにくいので、MKSA 単位系で表した組立単位の表を付録につけている[2]。

以下、電気回路の基本式(1), (3)と電磁気学の基本式(4)～(8)式の関係を明らかにする。具体的には、

抵抗（V_R）： (8)式

コイル（V_L）：(4)式と(5)式

コンデンサ（V_C）：(5)式

で関係付けられる。

２．電磁気学視点での電気回路素子の動作

2.1 抵抗にかかる電圧と電流の関係

これは、よく知られているオームの法則である。これを電磁気学視点で導いてみよう。使う方程式は(8)のローレンツ力である。以下、図２で説明する。

元になる式は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

媒質内において、電荷は自由電子によって運ばれる。質量 m、電荷 e (<0) の電子が受ける力で見ると

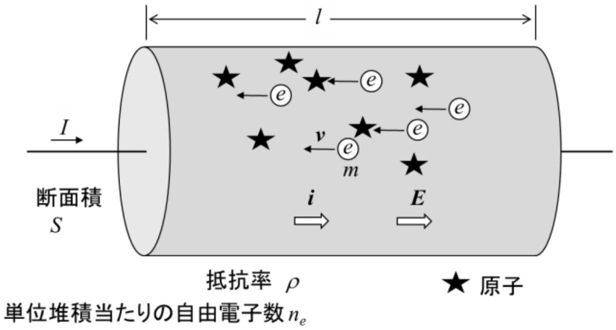

図２　抵抗体のサイズと媒質内の電磁界（座標は右方向を x 軸）

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

電流が流れる方向の成分（x 軸方向）でみると、上式の右辺第２項は消えるので

$$m\frac{dv_x}{dt} = eE_x$$

である。このままだと、電子は加速度を受けて速度が上がってゆくが、実際には、電子は媒質内の原子にぶつかり減速され、定常状態では速度は一定になる。そうすると上記の式の左辺は 0 となる。一方、衝突によってブレーキがかかる項（速度と質量に比例）が加わり

$$0 = eE_x - \frac{mv_x}{\tau}$$

となる。ここで、τ[s]は電子が原子に衝突する確率の逆数に比例する定数で、媒質に依存する量である。これより、電子の速度は次式となって電圧 V_R に比例する。

$$v_x = \frac{\tau e}{m}E_x = -\frac{\tau e V_R}{ml} \quad \left(\because\ E_x = -V_R / l\right)$$

一方、単位体積当たりの自由電子の数を n_e [個/m^3]とすると、電流 I は、

$$I = i_x S = e n_e v_x S = -\frac{\tau n_e e^2 S V_R}{ml} = -\frac{V_R}{R}$$

となり、電圧 V_R に比例する。オームの法則である（極性が負になっているのは図１の V_R の向きによる）。

抵抗 R は媒質の抵抗率ρ [Ωm]を用いて

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

と表されるが、この抵抗率を上記の諸量を用いて表すと次式となる。

$$\rho = \frac{m}{\tau n_e e^2}$$

なお、厳密には電極間に変位電流も流れるが、無視できる量であることが調べられている。

2.2 コイルにかかる電圧と電流の関係

図３に示す口径 S、長さ l、単位長さあたりの巻き数 n のコイルを用いる。コイルのインダクタンス（正確には自己インダクタンス、単位：ヘンリー）L は、電流 I によってコイル内に生まれる磁束 Φ_m に対して、次式で定義される。

$$L = \frac{nl\Phi_m}{I} \tag{9}$$

その結果として

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{10}$$

となる。電気回路ではここからスタートするが、電磁気学でここまでを調べる。

このインダクタンス L を定めるために用いるマクスウェルの方程式はアンペア・マクスウェルの法則の式(5)と電磁誘導の式(4)である。具体的な手順は以下である。

i) 式(5)より、電流 I を与えコイル内の磁束 Φ_m を求める

ii) 式(6)より、磁束が時間変動するときに発生する起電力 V_L を求める

まず、コイル内の磁束 Φ_m を求める。(5)式右辺第２項の変位電流は無い（＝無視できる）ので、電磁気学の基本式は以下である。

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} \tag{11}$$

アンペアの周回積分の法則を図３の点線で表す矩形（コイルの中と外を含み横の長さをΔx）に適用すると、コイル内の磁界 H（向きはコイルの中心軸方向）は、コイルの外側は H=0 なので（←電磁気学の教科書を見てほしい）、式(11)の左辺をストークスの定理で変形すると

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = H\Delta x$$

一方、右辺は

$$\int_S \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} dS = n\Delta x I$$

より、

$$H = nI$$

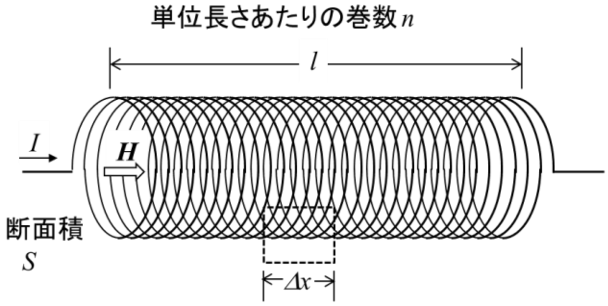

図３　コイルの形状

コイル内の磁束は、

$$\Phi_m = BS = \mu_0 HS = \mu_0 nIS \tag{12}$$

コイルに起電力が起きるのは磁束が期間的に変化するとき、すなわち、電磁誘導の法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

に従う。

コイル一周分に生まれる起電力 V_0 は

$$V_0 = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = -S\frac{dB}{dt} = -\mu_0 nS\frac{dI}{dt}$$

コイル全体に生まれる起電力 V_L は

$$V_L = nlV_0 = -\mu_0 n^2 lS\frac{dI}{dt}$$

となる。上式と(10)式より、インダクタンス L は上記の諸量を用いて次式で表される。

$$L = \mu_0 n^2 lS$$

2.3 コンデンサにかかる電圧と電流の関係

図４に示す平行平板コンデンサを用いて説明する。コンデンサの静電容量は

$$C = \frac{Q}{V_C}$$

で定義され、平行平板コンデンサでは、

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

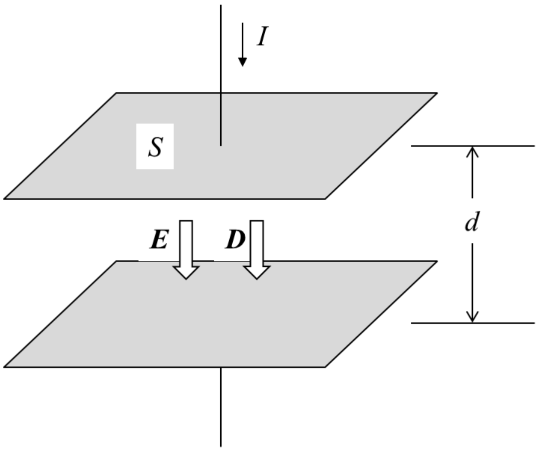

図４　コンデンサの形状と電極間の電磁界

となることはよく知られていることである。

この解析に必要なマクスウェルの方程式はアンペア・マクスウェルの法則を表す(5)式であり、以下の形で整理できる。

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_d$$

$$\boldsymbol{i}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

コンデンサの極板間に流れる電流の電流密度は、伝導電流はなく、変位電流 $\boldsymbol{i}_d$ を電流密度とする電流である。このとき、コンデンサを流れる電流 I は

$$I=i_dS=\varepsilon_0S\frac{dE}{dt}=-\frac{\varepsilon_0S}{d}\frac{dV_C}{dt}$$

これより、

$$V_C=-\frac{d}{\varepsilon_0S}\int^t Idt=-\frac{1}{C}\int^t Idt \quad\rightarrow\ C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$$

2.4 電圧と電流の関係のまとめ

三つの回路素子に対する電圧を加え合わせると

$$V=-\left(V_R+V_L+V_C\right)$$

$$=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int^t Idt$$

となり、式(1)が導かれた。また、図２～４に示す形状の素子に対しては、各素子値は次式となる。

$$R = \frac{ml}{\tau n_e e^2 S}$$

$$L = \mu_0 n^2 lS$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

このように、電気回路の動作は電磁気学（マクスウェルの方程式＋ローレンツ力の式）によって説明できる。

３．導線に流れる電流の速度

電気回路で扱われる回路の大きさは高々机の上に置かれる程度のものが想定され、素子間を結ぶ電流の速さを意識することは通常無い。実際、導線内の電荷は自由電子が運ぶのであるから、電流の速度は電子の動きに同じくらいと思うであろう。ところが、電磁気学で実際に計算してみると、電子の速度は、一例であるが、0.074mm/s と算定される[1]（p.51 の例題６）。設定条件によってこの値は変わるが、とんでもなく遅い速度であることには変わりはない。それゆえ、かたつむりの歩みに例えられることも多い。一方で、導線に流れる電流の速度は光の速さに近いという実測もなされている。ものすごく足の遅いランナーが、とんでもない速いスピードで電気信号を運んでいると言うパラドックスである。

これについては、[3]に詳しくまとめているのでそれを見てほしいが、電磁気学では、理論的な解析ができる土俵（例えば、中心に導線があり、帰りの電流を導線を囲む円筒にするような円管同軸線）においての結果ではあるが、以下のように整理されている。

i) 導線にかかる電圧 V と電流 I により VI の電力を運ぶ

ii) 導線の周囲に電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ ができるが、この電磁波が運ぶ電力（ポインティングベクトル $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ の同軸管断面の積分値）を計算すると上記の電力 VI に等しい

iii) ii)の電磁波の伝搬速度は自由空間の光の速度 c に等しい

iv) 導線内の電子の実際の移動速度はかたつむりの歩みであるが、導線の電荷密度と電流の大きさから等価的な意味での電荷の移動速度を求めると光速 c になる。（一つの電荷が端から端まで動いているわけではないが、そう見えると言う意味）

ここから先は解釈の問題であるが、以下のようなイメージを持つことができる。

① 電気信号（エネルギー）は導線の周囲にできる電磁波が光の速度で運ぶ

② 導線内の電子は周囲の電磁界に反応して揺れているだけ。

（海の波の伝搬と同じ。水が波の速度で流れているわけではなく、上下しているだけ。あるいは、手旗信号で信号は進むが、旗手はその場にとどまっている）

これは理想状態での話であるから、現実の回路（信号線と帰線であるアースが複雑に結ばれた電気回路）では、光の速度に等しいとまでは言い切れないが、いずれにしても、電気回路的には、十分速い速度とみなして、それを気にする必要は無い。

参考文献

[1] 砂川重信，電磁気学の考え方，岩波書店, 1993.

[2] 唐沢好男，無線通信物理層技術へのアプローチ，コロナ社, 2021.

[3] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（５）：電線に流れる電流は光の速さで進む？” 技術レポート（私報），YK-027, 2019.07. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-027_EM-5.pdf

付表　電磁気関連物理量の単位名称と MKSA 単位系での次元

（組立単位：$\mathrm{m}^p\mathrm{kg}^q\mathrm{s}^r\mathrm{A}^s$ の指数部分を[p,q,r,s]で表している）

名称（物理量）	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位 M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N（ニュートン）	J/m, kgm/s^2	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J（ジュール）	Nm	2	1	-2	
電力	P	W（ワット）	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V（ボルト）	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A（アンペア）	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m^2	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω（オーム）	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F（ファラド）	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H（ヘンリー）	J/A^2	2	1	-2	-2
誘電率	ε		C^2/Nm^2, F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C（クーロン）	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb（ウェーバ）	Nm/A, Tm^2, Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m^2	-2		1	1
磁束密度	B	T（テスラ）	N/Am, Wb/m^2		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz（ヘルツ）	1/s			-1	

読者の皆さんへ

本内容のテーマを拡大した資料を下記に公開しています。

TR-YK-061：電磁気学のからくり：　第８章　電気回路と電磁気学