Technical Report YK-066
Sept. 10, 2021
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（18）：ベクトルポテンシャル視点からの電磁波の描像

今日、一般的な電磁気学の教科書においては、自由空間を伝搬する電磁波は電界と磁界の相互作用、すなわち、電磁誘導と変位電流の掛け合いを持続しながら光速で伝搬するというイメージが与えられている。本レポートでは、ベクトルポテンシャルを伝搬の主役にし、電界と磁界はベクトルポテンシャルが生み出した二人の子供（＝相互作用ではない）と言う描像を示す。ただし、解釈の問題であるから、どちらが正しいかと言うような主張ではなく、多角的な視点をもとうと言う主旨である。

１．平面波の伝搬

自由空間における平面波の伝搬を考える。その主役は電界 $\boldsymbol{E}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ である。マクスウェルの方程式を自由空間に対して $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ を用いて表すと

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{4}$$

であり、電界について、次式の波動方程式が得られる（導出等は電磁気学の教科書で）。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{5}$$

電界が x 方向のみに成分を持ち、これが z 方向に進むとすると、 (5)式は

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{6}$$

となる。この方程式は 1 次元の波動方程式である。

次式はこの方程式から得られる一つの平面波である。

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz) \quad \left(k \equiv \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \tag{7}$$

ここで、ωは角周波数、k は波数、λは波長である。

磁界も(5)式と同様な方程式になるが、(1)式の電界と磁界の関係から、磁界は y 軸方向の成分となり、(7)式に対応するものとして次式が得られる

$$H_y = H_0 \sin\left(\omega t - kz\right) \tag{8}$$

$$H_0 = E_0 / Z_0 \quad \left(Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 377[\Omega]\right)$$

ここで、Z_0 は自由空間の特性インピーダンスと呼ばれる。

図１は電界と磁界の関係を表している。式(1)の磁界の時間変動が電磁誘導により電界の渦を、式(2)より電界の時間変動、すなわち、変位電流が磁界の渦を生み出し、その相互作用が持続して伝搬する電磁波を形成していると解釈されている。

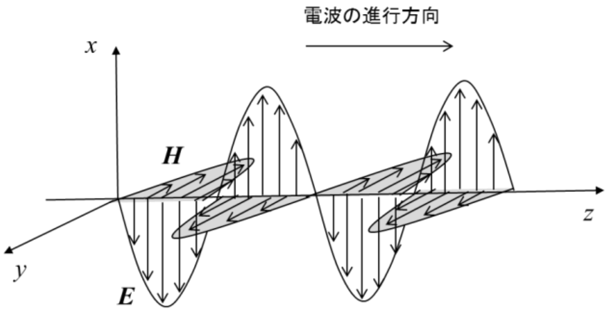


図１　平面波の電界と磁界の関係（時間を t=0 に固定して空間領域の変化を表している）

電磁界はエネルギーを持ち、単位体積当たりの電気エネルギーを u_E [J/m^3]、磁気エネルギーを u_M [J/m^3]とすると、それらは次式で与えられる。

$$u_E = \frac{1}{2} D_x E_x = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_x^2 \quad \left(D_x = \varepsilon_0 E_x\right) \tag{9}$$

$$u_M = \frac{1}{2} B_y H_y = \frac{1}{2} \mu_0 H_y^2 \quad \left(B_y = \mu_0 H_y\right) \tag{10}$$

自由空間において電磁波は光速で伝搬し、そのときの E_x と H_y は、式(8)で与えられる自由空間の特性インピーダンス Z_0 で関係付けられるので、全エネルギーの密度 u_{EM} は

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2\right) = \varepsilon_0 E_x^2 \qquad \left(\because\ \mu_0 H_y^2 = \mu_0 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_x\right)^2 = \varepsilon_0 E_x^2\right) \tag{11}$$

となる。単位面積当たりを通過する単位時間当たりのエネルギー、すなわち、電力 P [W/m^2]は次式である。

$$P = u_{EM} c = c\varepsilon_0 E_x^2 = E_x H_y \tag{11}$$

また、その時間平均値<P>は $E_0 H_0/2$ である。

電波の進行方向は電界と磁界の向きに対して直交するので、その進行方向を含めて上記電力をベクトル $\boldsymbol{S}$ であらわすと、

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{12}$$

である。この電力の移動する方向を表すベクトルはポインティングベクトル（Poynting vector）と呼ばれる。

２．ベクトルポテンシャル

前節では、電界と磁界を主役にして電磁波を説明したが、ここに、新たな主役：ベクトルポテンシャルを登場させる。電磁気学の世界では観測の手段を持たない物理量であるため、存在が疑われてきた透明人間のようなものである（脚注）。ベクトルポテンシャルに関する具体的なイメージを持つにはある程度の予備知識が必要であり、それについては、例えば、[1]の５章を見てほしい。

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と関連付けられ、次式によって定義される。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \rightarrow \ \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{13}$$

電界 $\boldsymbol{E}$ とベクトルポテンシャルの関係は上式を式(1)に代入し、かつ、静電界での性質 $\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$ で表されるスカラーポテンシャル ϕ の効果も合わせ、次式で表される。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi \tag{14}$$

自由空間の伝搬では上式右辺の第２項は考慮しなくて良いので、ベクトルポテンシャルと電界・磁界の関係は次式となる。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{16}$$

注）量子力学の世界には、ベクトルポテンシャルの作用が具体的に現れるアハラノフ・ボーム効果がある。この実験的検証により、真に存在する物理量であることが確かめられている[2]）

３．ベクトルポテンシャルを主役とする電磁波伝搬の描像

ベクトルポテンシャルの波動方程式も電界や磁界と同じ形で表され次式となる（注:この式は電界と磁界で表されるマクスウェルの方程式からローレンツゲージを採用して導かれる。詳しくは電磁気学の教科書、あるいは[1]の５章で）。

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{17}$$

方程式の形が同じなのでその解も電界や磁界と同じようになり、その一つの解として、x 軸方向に成分を持ち z 軸方向に進む次式で表される平面波を得る。

$$A_x = A_0 \cos(\omega t - kz) \tag{18}$$

この式と(15),(16)式から電界と磁界が次のように求められる。

$$E_x = \omega A_0 \sin(\omega t - kz) \tag{19}$$

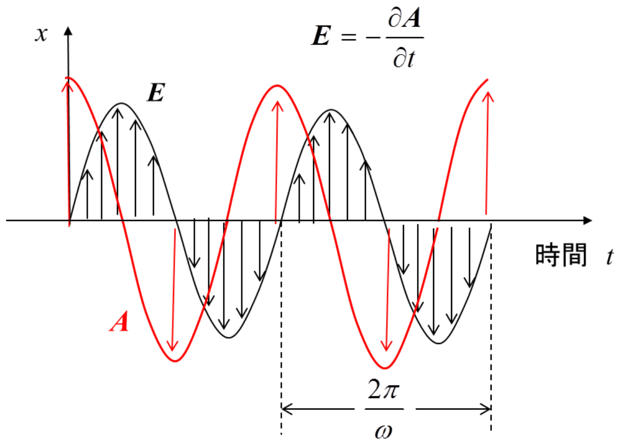
$$H_y = \frac{k}{\mu_0} A_0 \sin(\omega t - kz) = \frac{1}{Z_0} E_x \tag{20}$$

図２(a)はベクトルポテンシャルと電界の関係を時間軸に、(b)は磁界との関係を空間軸に対して示している。空間軸に対して共通の土俵で表したものが図３である。図３は図１にベクトルポテンシャルを追加した図になる。ベクトルポテンシャルを主役（＝電磁波の根本的な物理量）に据えて電磁界を見れば、電界はその時間変動から、磁界はその空間変動（回転）から生まれており、電界と磁界の相互作用と言う姿は消えていることが理解できるであろう。ベクトルポテンシャルが親で、電界と磁界はその子供というイメージである。

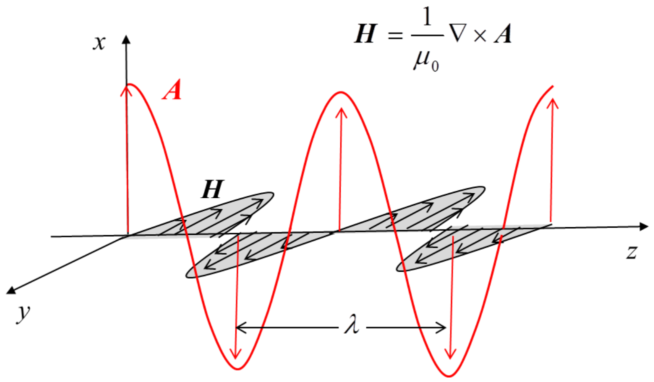
次に電磁界のエネルギーを考えてみたい。電磁波のエネルギー密度は(11)式より $\varepsilon_0 E^2/2$ と $\mu_0 H^2/2$ の和 $\varepsilon_0 E^2$ で表されることを述べた。$\varepsilon_0 E^2$ は DE、$\mu_0 H^2$ は BH であるので、電気エネルギーは空間の電束密度 $\boldsymbol{D}$ と電界 $\boldsymbol{E}$ が、磁気エネルギーは磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ が力を合わせてエネルギーを運んでいるとみなすことができる。では、ベクトルポテンシャルを主役としたとき、ベクトルポテンシャルは何と力を合わせてエネルギーを運ぶのであろうか。この目的のため、関連する物理量の単位の次元に着目してみたい。

電磁気学に現れる物理量の MKSA 単位系で表した組立単位を表１に示す。基本単位：m, kg, s, A に対して組立単位は $\mathrm{m}^p\mathrm{kg}^q\mathrm{s}^r\mathrm{A}^s$ であり、これを指数部だけを使って[p,q,r,s]で表す。例えば[DE]=[-2,0,1,1]+[1,1,-3,-1]=[-1,1,-2,0]は[J/m^3]となり、確かにエネルギー密度である。

電界のエネルギー密度は D と E の積、磁界のエネルギー密度は B と H の積、と言うことはベクトルポテンシャルにもエネルギーを形作る相棒がいるはずである。ベクトルポテンシャルの組



(a) 場所固定（x=0）における電界とベクトルポテンシャルの時間変化



(b) 時間固定（t=0）における磁界とベクトルポテンシャルの空間変化

図２平面波のベクトルポテンシャルと電界及び磁界の関係（横軸の時間と空間の違いに注意）

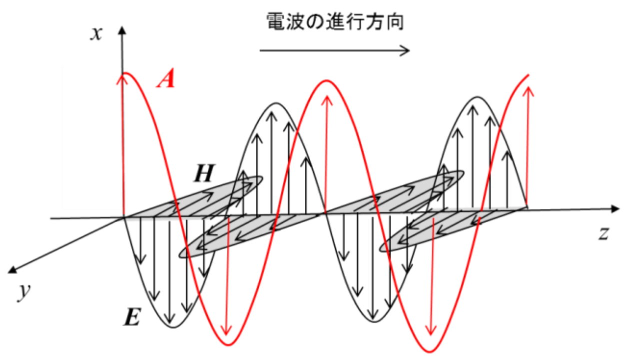


図３　平面波のベクトルポテンシャル・電界・磁界の関係（時間固定しての空間変化）

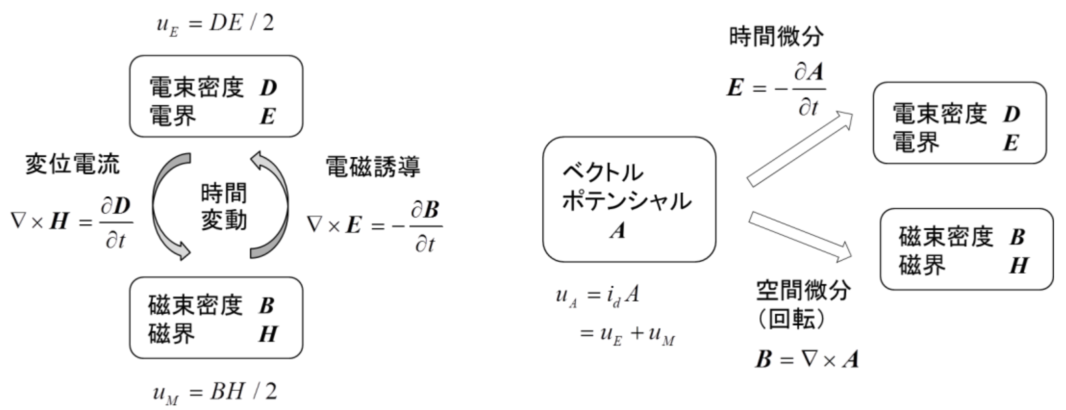
立単位は[1,1,-2,-1]であるので、エネルギー密度との比：[-1,1,-2,0]-[1,1,-2,-1]=[-2,0,0,1]となり、これは電流密度[A/m^2]である。自由空間に伝導電流は流れていないので変位電流 i_d に違いない。（注：変位電流と名づけられているが実際は電流密度である。変位電流密度と呼ぶのが正確であるが慣例に従い変位電流と呼ぶ）。先にあげた質問：エネルギー算定におけるベクトルポテンシャルの相棒は、の答えは変位電流であると理解して良い。平面波の場合の変位電流（向きは電束密度、すなわち電界と同じ向き）は、

$$i_d = \frac{\partial D_x}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega^2 A_0 \cos\left(\omega t - kz\right) = \varepsilon_0 \omega^2 A_x \tag{21}$$

となる。次元確認ができたので、定量的な部分の係数合わせをすると、ベクトルポテンシャルのエネルギー密度 u_A は次式で算定できる。（注：電磁界解析で求めたものではなく、上記の類推により求めている）

$$\left\langle i_d A_x \right\rangle = \varepsilon_0 \omega^2 \left\langle A_x^2 \right\rangle = \varepsilon_0 \left\langle E_x^2 \right\rangle \quad \rightarrow \quad u_A = i_d A_x \tag{22}$$

図４は本レポートのポイントをまとめている。ベクトルポテンシャルを主役にすると、電界と磁界はそこからの産物となり、両者に直接的な相互作用はない。だからと言って、**電磁波の伝搬ではベクトルポテンシャルが主役、電界と磁界は脇役である**、と言う結論になってしまうのは行き過ぎである。本質のすべてはマクスウェルの方程式にあり、式に与えられている関係以上のこと（＝主役・脇役と言うような格付け）は、すべて解釈の問題であるからである。特にベクトルポテンシャルは我々に観測手段が無い透明人間のようなもので、その存在が感知できるのは電界と磁界の方である。その電界と磁界をダブル主役に据えれば、図１に示すような相互作用で結ばれているのも事実であり、このほうが素直に受け入れられるからである。



(a) 電界と磁界の相互作用　　(b) ベクトルポテンシャルと電界・磁界の親子関係

図４　電磁波のエネルギーと伝搬における電界・磁界・ベクトルポテンシャルの関係

表１　電磁気関連物理量の単位名称と MKSA 単位系での次元

（組立単位：$m^p kg^q s^r A^s$ の指数部分を[p,q,r,s]で表している）

名称（物理量）	代表的表記	単位名称	物理単位	組立単位 M (m)	K (kg)	S (s)	A(A)
力	F	N（ニュートン）	J/m, kgm/s^2	1	1	-2	
エネルギー(仕事)	U	J（ジュール）	Nm	2	1	-2	
電力	P	W（ワット）	J/s, VA	2	1	-3	
電圧	V, ϕ	V（ボルト）	J/C, W/A	2	1	-3	-1
電流	I	A（アンペア）	C/s, W/V				1
電流密度	i		A/m^2	-2			1
抵抗(インピーダンス)	R	Ω（オーム）	V/A	2	1	-3	-2
導電率			1/Ωm	-3	-1	3	2
静電容量	C	F（ファラド）	C/V	-2	-1	4	2
インダクタンス	L	H（ヘンリー）	J/A^2	2	1	-2	-2
誘電率	ε		C^2/Nm^2, F/m	-3	-1	4	2
透磁率	μ		H/m	1	1	-2	-2
電荷・電束	Q, q	C（クーロン）	As			1	1
磁荷・磁束	Q_m, q_m	Wb（ウェーバ）	Nm/A, Tm^2, Vs	2	1	-2	-1
電束密度	D		C/m^2	-2		1	1
磁束密度	B	T（テスラ）	N/Am, Wb/m^2		1	-2	-1
電界	E		V/m	1	1	-3	-1
磁界	H		A/m	-1			1
ベクトルポテンシャル	A		Tm	1	1	-2	-1
周波数	f	Hz（ヘルツ）	1/s			-1	

参考文献

[1] 唐沢好男，電磁気学のからくり, Open Access Book, 2021.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-061_EM_Wonderland.pdf

[2] 外村彰, “電子波で見る電磁界分布（ベクトルポテンシャルを感じる電子波）,” 信学会誌, vol. 83, no. 12, pp. 906-913, 2000. https://www.ieice.org/jpn/books/kaishikiji/200012/20001201-1.html