Technical Report YK-068_rev
March 11, 2022
Y. Karasawa

近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について [II]（改訂版）

～最大利得とそのウェイト決定法～

唐 沢 好 男

このレポートは、アレーアンテナの利得に関するレポートYK-063[1]の続編である。[1]では、アレー素子を近接配置するとどういうメカニズムでアレー利得が定まるかという筆者自身が抱いていた疑問に焦点を当てている。その後半では、アレーの近接配置の場合を含めて、利得の簡易な求め方についてまとめている。本レポートは、その利得算定式をベースとして、ウェイト制御による利得の最大化について述べる。アレーアンテナの最大利得を求める方法はM. T. Ma のアレーアンテナの本[2]（その§2.9）に示されているが、筆者なりに読み解き、計算結果を加えるなどして、できるだけ丁寧にまとめている。Maの本、さらにそれを解説しているアンテナ工学ハンドブック[3]（の8.2.2項）では、具体例について、無指向性アンテナを素子とするアレー特性の計算結果が示されているが、ダイポールアンテナについても同様の数値解析が可能であるので、後者に主眼をおいてその特性を定量的に示す。

なお、元になるレポートYK-063を大幅に書き換えて修正版YK-063_revに差し替えたので、それとの整合性をとるため本レポートもその修正を行って、改訂版YK-068_revとした。

１．アレーアンテナ利得の基本式

本章は前レポート[1]の第３章の要約である（詳細は[1]を見てほしい）。

前レポートで、アレーアンテナの放射パターンは、素子間隔が狭い場合でも、素子アンテナの放射パターンとアレーファクタの積で表されること、アレーアンテナの利得は、その放射パターンをアンテナ利得の定義式（二重積分の式）に入れて求めてよいことの根拠を述べた。ただし、その計算が成立する条件は、同相給電の場合に、各素子への入力電流が同じになるように給電調整がなされるときである。

以下、特性が同じ素子アンテナを同じ向きに配列するアレーアンテナを任意ウェイトで制御するときの利得を考える。ここでは、N個の素子アンテナを直線状に配列するリニアアレーとする。その座標と配置を図１に示す。

アレーアンテナの放射電界Eは次式で表される。

$$E(\theta,\phi) = f(\theta,\phi)\sum_{i=1}^{N} w_i \exp\left(jkx_i \sin\theta \cos\phi \right) = f(\theta,\phi)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(\theta,\phi) \qquad (1)$$

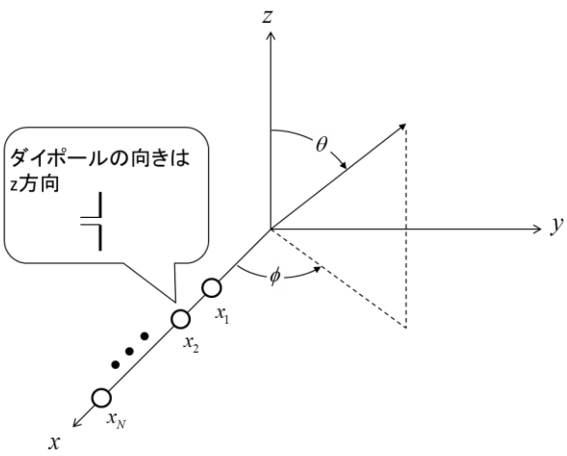

図１　アレーアンテナの配置と座標系

ここで、$f(\theta,\phi)$は素子アンテナの電界放射パターン、$\boldsymbol{w}$はアンテナウェイトベクトル、$\boldsymbol{v}$はアレー応答ベクトルである。

指向性利得Dは次式で表される。

$$D(\theta_0,\phi_0)=\frac{\left|f(\theta_0,\phi_0)\right|^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(\theta_0,\phi_0)\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}(\theta_0,\phi_0)\boldsymbol{w}^*}{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(\theta,\phi)\right|^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(\theta,\phi)\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}(\theta,\phi)\boldsymbol{w}^*\sin\theta d\theta d\phi}$$

$$=\frac{\left|f(\theta_0,\phi_0)\right|^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\theta_0,\phi_0)\boldsymbol{w}^*}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}^*} \tag{2a}$$

ここで、

$$\boldsymbol{A}(\theta,\phi)\equiv\boldsymbol{v}(\theta,\phi)\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}(\theta,\phi)\equiv\begin{Bmatrix}\ddots & & \\ & a_{lm} & \\ & & \ddots\end{Bmatrix} \tag{2b}$$

$$a_{lm}=\exp\left[jk\left(x_l-x_m\right)\sin\theta\cos\phi\right] \tag{2c}$$

$$\boldsymbol{B}\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(\theta,\phi)\right|^2\boldsymbol{A}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi\equiv\begin{Bmatrix}\ddots & & \\ & b_{lm} & \\ & & \ddots\end{Bmatrix} \tag{2d}$$

$$b_{lm}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(\theta,\phi)\right|^2\exp\left[jk\left(x_l-x_m\right)\sin\theta\cos\phi\right]\sin\theta d\theta d\phi \tag{2e}$$

ウェイトを定めれば、(2a)式を計算することによってそのときの利得を求めることができる。任意の素子アンテナ指向性パターンに対して、N次のエルミート行列$\boldsymbol{B}$の成分は二重積分で表されるが、以下で示すように、$f(\theta,\phi)$の形によっては積分が解けて閉形式で表すことができる。行列成分b_{lm}は、位置x_lとx_m間のアンテナパターン相関（あるいは、アンテナパターンの空間相関）と言えるものである。

<u>無指向性アンテナの場合</u>：$|f(\theta,\phi)|^2=1$

$$b_{lm}=\frac{\sin\left(kx_{lm}\right)}{kx_{lm}} \qquad x_{lm}\equiv x_l-x_m \tag{3}$$

<u>微小ダイポールアンテナの場合</u>：$|f(\theta,\phi)|^2=\sin^2\theta$

$$b_{lm}=\frac{3}{2}\left\{\frac{\sin\left(kx_{lm}\right)}{kx_{lm}}\left(1-\frac{1}{\left(kx_{lm}\right)^2}\right)+\frac{\cos\left(kx_{lm}\right)}{\left(kx_{lm}\right)^2}\right\}/D_{SDP}\quad\left(D_{SDP}=1.5\right) \tag{4}$$

<u>半波長ダイポールアンテナの場合：　$|f(\theta,\phi)|^2 \fallingdotseq \sin^{2.6}\theta$</u>

[1]には超幾何関数による精度の良い近似式を示しているが、そこでも述べたように、微小ダイポールアンテナの式を流用した次の近似式で十分である。

$$b_{lm}\approx\frac{3}{2}\left\{\frac{\sin\left(kx_{lm}\right)}{kx_{lm}}\left(1-\frac{1}{\left(kx_{lm}\right)^2}\right)+\frac{\cos\left(kx_{lm}\right)}{\left(kx_{lm}\right)^2}\right\}/D_{HDP}\quad(D_{HDP}=1.64) \tag{5}$$

２．最大利得とそれを実現するウェイト：その理論

アレーアンテナの最大利得を求める理論はM. T. Maのアレーアンテナの本[3]（その§2.9；さらに、その解説はアンテナ工学ハンドブック[4]（の8.2.2項））にまとめられており、これを示す。

アレーアンテナの利得を求める式(2a)は次のように展開できる。

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{w}^{*}D(\theta_0,\phi_0)=\left|f(\theta_0,\phi_0)\right|^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\theta_0,\phi_0)\boldsymbol{w}^{*}$$

$$\rightarrow\quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}^{*}D(\theta_0,\phi_0)=\left|f(\theta_0,\phi_0)\right|^2\boldsymbol{A}(\theta_0,\phi_0)\boldsymbol{w}^{*}$$

この形は、以下のように、正方行列$\boldsymbol{R}$を固有値λと固有ベクトル$\boldsymbol{e}$で関係付ける固有値問題になっている。

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{R} = \left| f(\theta_0, \phi_0) \right|^2 \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{A}(\theta_0, \phi_0)$$

$$\lambda = D, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}^*$$

ここでは、Dの最大値D_{max}を求めたいのであるから、(6)式の最大固有値λ_{max}を求めることであり、それを実現するアンテナウェイト$\boldsymbol{w}_{opt}$は、最大値に属する固有ベクトル$\boldsymbol{e}_{max}$の共役複素数として得られる。すなわち、

$$D_{\max} = \lambda_{\max}, \quad \boldsymbol{w}_{opt} = \left(\boldsymbol{e}_{\max} \right)^* \tag{7}$$

である。この行列$\boldsymbol{R}$は$N\times N$のエルミート行列であり、固有値λは非負の実数である。ちなみに、このケースでは、N個ある固有値のうち最大固有値以外は値が0になる。このようにして、アレーアンテナの利得最大化問題は固有値解析に結び付けることで、一般的に解くことができる。

３．アレーアンテナ利得の素子間隔特性

３．１　無指向性アンテナ素子ブロードサイドアレー

図１において、無指向性素子アンテナの間隔がdの等間隔リニアアレーとし、y軸方向（$\theta=\phi=\pi/2$：ブロードサイドアレー）の利得を求める。図２はN=2〜8の場合について、同相給電（N個のウェイトの値が同じ；黒線）と最大利得給電（赤点線）の二つについての指向性利得Dを波長正規化アレー素子間隔に対して示している（縦軸の利得の値はdB値ではなく真数値）。N=2では、最大利得給電の位相は同相になるので、二つの利得は同じになる。最大利得を得るウェイトの値は、N=3の場合について、[3]の表8.2に（ノルムを1に正規化していない値が）示されているので、ここでは割愛する。d=0付近では、最大利得がN=3と4で同じ値に収束しているが、この性質はN=5と6、N=7と8のペアにも見られ、値そのものは少しずつ上がってゆく。図より、ブロードサイドアレーについては、最適ウェイトにより利得に有意な差が現れるのは３素子以上であって、かつ、半波長間隔より短い部分に対してである。しかしながら、最適ウェイトと言えども、利得低下が顕著になる部分をわずかに高める程度であり、有効性と言う目で見ると、利得最大化のメリットは少ないと言えよう。

３．２　無指向性アンテナ素子エンドファイアアレー

無指向性素子アンテナの間隔がdの等間隔リニアアレーで、x軸方向（$\theta=\pi/2, \phi=0$：エンドファイアアレー）の利得を求める。図３はN=2, 3, 4の場合について、共相給電（黒線）と最大利得給電（赤点線）の二つについての指向性利得Dを波長正規化アレー素子間隔に対して示している。ここで言う共相給電とは、x軸上の遠方点で見て、各素子からの電波の位相が同相になる給電位相条件であり、給電位相そのものを同相とする図２の同相条件とは異なる。表１はN=4 について、最大利得を得るウェイトをd/λ（λ:波長）が0.1〜1.0について示している。

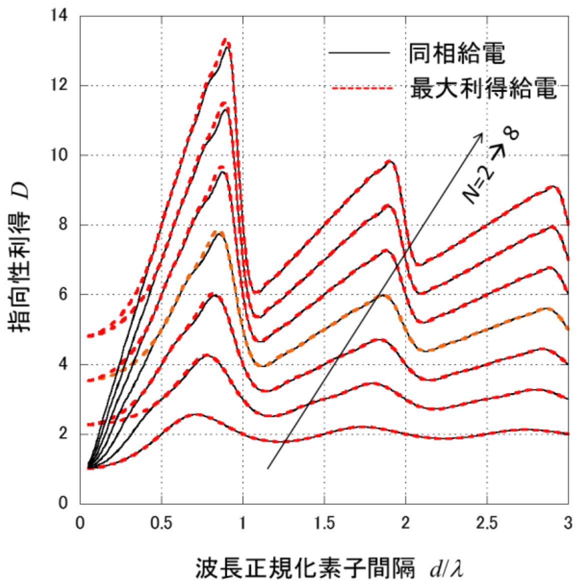

図２　無指向性アンテナ素子ブロードサイドアレーの指向性利得（同相給電と最大利得給電）

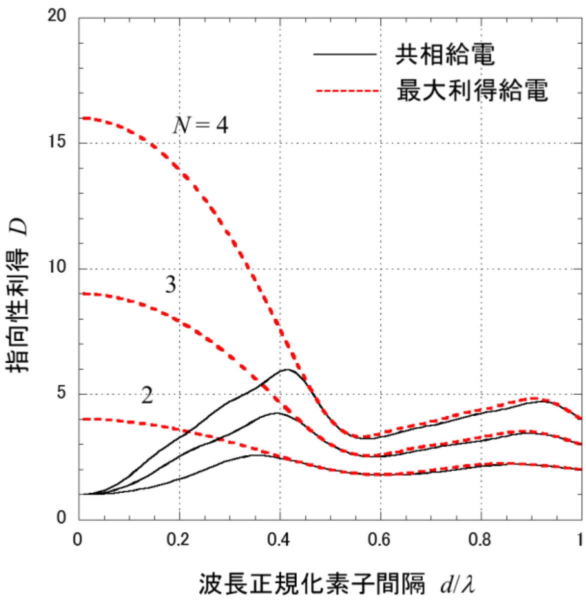

図３　無指向性アンテナ素子エンドファイアアレーの指向性利得（共相給電と最大利得給電）

図より、エンドファイアアレーの場合には、半波長間隔以下の部分で、利得最大化の効果が大きいことがわかる。また、d→0でG_{max}→N^2に漸近する性質が見える。前稿[1]の２章で、半波長ダイポールアンテナの２素子エンドファイアアレーにおいて、d→0で逆相給電にすると、利得向上効果が現れることを示し、そのメカニズムを述べたが、その究極が表１のウェイト設定ということになる。同表より、N=4の場合、素子間隔が0に近づくほど、給電位相が隣接素子間で逆相に近づいてくるのが読み取れる。（この表の解釈については後述）

表１　無指向性アンテナエンドファイアアレー（N=4）において最大利得を得るアンテナウェイト
（位相の単位は度、最大利得 D_{max} の値は真数）

d/λ	w_1 振幅	w_1 位相	w_2 振幅	w_2 位相	w_3 振幅	w_3 位相	w_4 振幅	w_4 位相	D_{max}
0.1	0.2369	0	0.6663	-174.9	0.6663	10.2	0.2369	-164.7	15.496
0.2	0.2801	0	0.6493	-169.7	0.6493	19.7	0.2801	-150.0	13.954
0.3	0.3592	0	0.6091	-165.2	0.6091	27.6	0.3592	-137.7	11.299
0.4	0.4579	0	0.5389	-164.4	0.5389	29.9	0.4579	-134.5	7.582
0.5	0.5000	0	0.5000	180.0	0.5000	0	0.5000	180.0	4.000
0.6	0.5357	0	0.4615	136.3	0.4615	-92.6	0.5357	43.8	3.433
0.7	0.5014	0	0.4986	92.6	0.4986	-160.8	0.5014	-68.2	3.900
0.8	0.4819	0	0.5174	61.4	0.5174	125.5	0.4819	-173.2	4.383
0.9	0.4759	0	0.5230	28.3	0.5230	54.8	0.4759	83.1	4.820
1.0	0.5000	0	0.5000	0	0.5000	0	0.5000	0	4.000

３．３　微小ダイポールアンテナ素子エンドファイアアレー

微小ダイポールアンテナでのエンドファイアアレー特性（b_{lm}を(4)式で与える）を調べる。図４はN=2, 3, 4の場合について、共相給電（黒線）と最大利得給電（赤点線）の二つについての指向性利得Dを波長正規化アレー素子間隔に対して示している。同図より、基本的な傾向は図３に示した特性と同じである。素子アンテナに利得が有る分、全体的に得られる利得は高くなっているが、素子アンテナの利得比である1.5倍までにはなっていない。表２はN=2, 3,4 について、最大利得を得るウェイトをd/λが0.1～1.0について示している。表１に示した無指向性エンドファイアアレー(N=4)の結果と比べてみると、数値にわずかな違いはあるものの、利得特性同様、大きな傾向は同じである。図５はN=2, 4, d/λ=0.2における共相給電と最大利得給電のアンテナパターンを$\theta=\pi/2$面で比較している。図より、N=2, 4共に、最大利得給電によりビーム幅が狭くなっていて、利得向上効果が理解できる。

半波長ダイポールエンドファイアアレーにおける利得は図４の結果を1.64/1.5≒1.1倍すればよく、最適ウェイトも表２の値で問題ない。

表２の結果から見えてくる性質を直感的に捉えてみたい。前稿[1]で２素子逆相給電のエンドファイヤアレーでは、d=0付近の利得が高い値を維持することを述べ（[1]の図７）、表２のN=2の場合のd/λ=0.1を見ると、最適位相や最大利得に同様の特徴が現れている。ウェイトの比率の傾向をd/λ=0.1について大雑把に見ると、N=2では 1, -1、N=3では 1, -2, 1、N=4では 1, -3, 3, -1になっている。極性が交互になっていることを除くと、パスカルの３角形である（$(x\text{-}y)^{N\text{-}1}$の係数）。この意味するところは何だろう。図６のようにペアを作って眺めてみると、N=3は、二つのN=2の一方を逆相にしてずらせて重ねた形になっている。N=4でもN=3との関係において同様である。N=2での高利得化の仕組みを最大限に生かして組み立てると, こういう形になるのかと納得できるものがあるであろう。

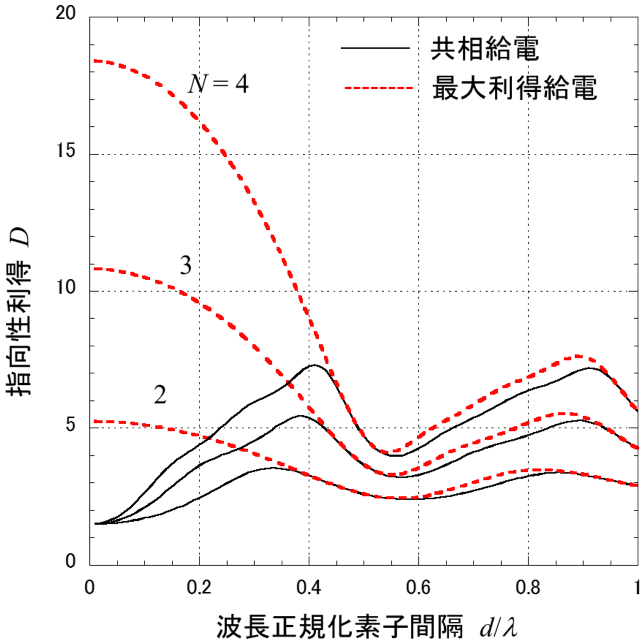

図４　微小ダイポールアンテナ素子エンドファイアアレーの指向性利得（共相給電と最大利得給電）

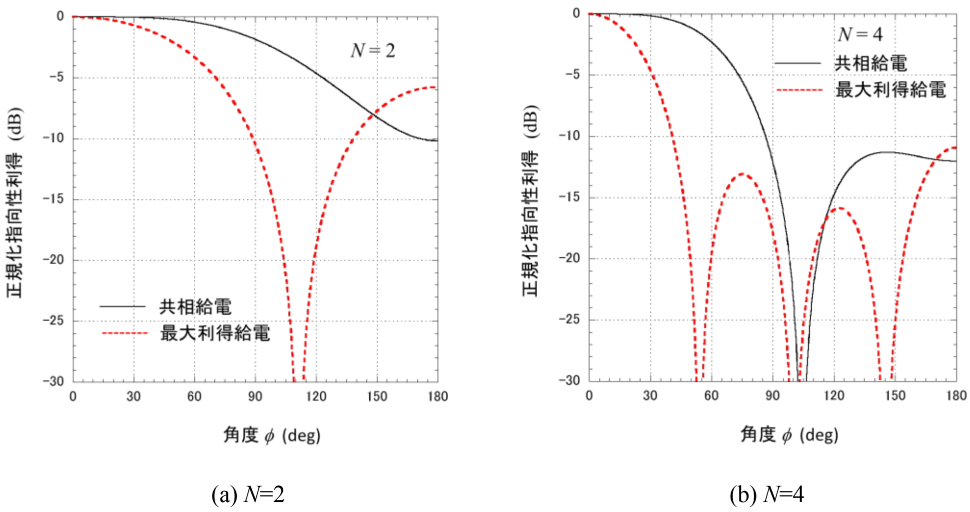

図５　微小ダイポール素子エンドファイアアレー（d/λ=0.2）における共相給電と最大利得給電のアンテナパターン（θ=π/2面、利得（dB値）はϕ=0で正規化）

反射板上に一つの半波長ダイポールを非常に近づけておいたアンテナは、N=2の逆相給電と等価なものとして[4]により実証されているが、２本の半波長ダイポールアンテナを重ねるように密接配置し、ウェイトを1:-3にすれば、N=4相当の（半波長ダイポールなので1.1倍、反射板だからその２倍の）利得38.9 (=15.9dBi)のアンテナになるはずであるが、実際はどうであろうか？（ [1]でも述べたようにこの場合のウェイト1: -3は入力電流の比率である。入力インピーダンスが素子１と２で違うので、給電回路を考えるのが難しそうには思うが)。

Technical Report YK-068_rev
March 11, 2022
Y. Karasawa

表２　微小ダイポールアンテナエンドファイアアレーにおいて最大利得を得るアンテナウェイト

(a) N=2

d/λ	w_1 振幅	w_1 位相	w_2 振幅	w_2 位相	D_{max}
0.1	0.7071	0	0.7071	-165.9	5.117
0.2	0.7071	0	0.7071	-153.7	4.721
0.3	0.7071	0	0.7071	-146.4	4.080
0.4	0.7071	0	0.7071	-150.4	3.285
0.5	0.7071	0	0.7071	180.0	2.604
0.6	0.7071	0	0.7071	117.5	2.494
0.7	0.7071	0	0.7071	69.3	3.025
0.8	0.7071	0	0.7071	46.7	3.459
0.9	0.7071	0	0.7071	29.0	3.317
1.0	0.7071	0	0.7071	0	2.890

(b) N=3

d/λ	w_1 振幅	w_1 位相	w_2 振幅	w_2 位相	w_3 振幅	w_3 位相	D_{max}
0.1	0.4232	0	0.8011	-172.8	0.4232	14.5	10.508
0.2	0.4671	0	0.7508	-165.9	0.4671	28.3	9.583
0.3	0.5315	0	0.6596	-160.2	0.5315	39.5	7.987
0.4	0.5893	0	0.5526	-159.6	0.5893	40.8	5.772
0.5	0.6031	0	0.5220	180.0	0.6031	0	3.675
0.6	0.6178	0	0.4865	124.5	0.6178	-111.0	3.547
0.7	0.5811	0	0.5697	88.6	0.5811	177.1	4.462
0.8	0.5371	0	0.6505	49.9	0.5371	99.7	5.202
0.9	0.5705	0	0.5909	25.9	0.5705	51.7	5.415
1.0	0.5831	0	0.5658	0	0.5831	0	4.258

(c) N=4

d/λ	w_1 振幅	w_1 位相	w_2 振幅	w_2 位相	w_3 振幅	w_3 位相	w_4 振幅	w_4 位相	D_{max}
0.1	0.2380	0	0.6658	-174.7	0.6658	10.3	0.2380	-164.4	17.865
0.2	0.2857	0	0.6468	-169.3	0.6468	19.9	0.2857	-149.4	16.190
0.3	0.3760	0	0.5989	-164.2	0.5989	27.7	0.3760	-136.5	13.262
0.4	0.4914	0	0.5084	-162.5	0.5084	30.8	0.4914	-131.7	9.014
0.5	0.5362	0	0.4609	180.0	0.4609	0	0.5362	180.0	4.727
0.6	0.5596	0	0.4323	130.9	0.4323	-100.3	0.5596	30.6	4.673
0.7	0.5008	0	0.4992	82.8	0.4992	-169.4	0.5008	-86.6	5.851
0.8	0.4631	0	0.5344	57.4	0.5344	114.0	0.4631	171.3	6.867
0.9	0.4750	0	0.5238	25.5	0.5238	48.6	0.4750	74.1	7.595
1.0	0.5086	0	0.4913	0	0.4913	0	0.5086	0	5.616

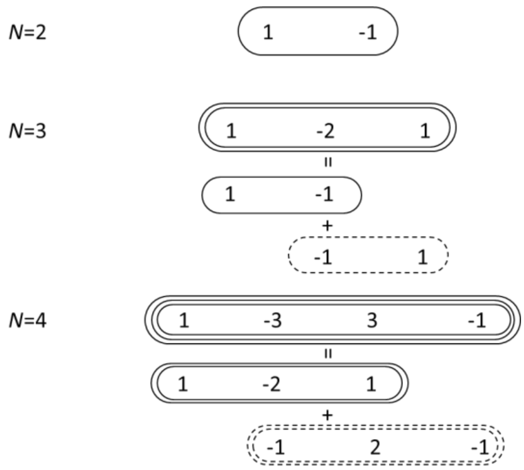

図６　表２のd →0 から見える最適ウェイトの仕組み（近似的な意味での）

３．４　まとめ

３章での結果を箇条書きにまとめる。

i) ウェイト最適化によって、利得向上が図れる部分は素子間隔が半波長以下である

ii) ブロードサイドアレーでは、利得向上効果はそれほど大きくないが、エンドファイアアレーではその効果が顕著に現れる

iii) 素子アンテナが無指向性アンテナの場合と微小ダイポールアンテナでは、利得の距離依存性の傾向に大きな違いは無い。得られる最大利得は、利得比（1.5倍）よりは小さい

iv) 半波長ダイポールアンテナの利得特性は微小ダイポールアンテナとの利得比1.1倍とすればよい

以上見てきたように、利得最大化の効果は、エンドファイアアレー構成において、アンテナ間隔が半波長に比べて十分小さいときに大きく現れる。同相給電（エンドファイアアレーでは共相給電）で得られる利得に対して、かなり大きな利得を実現するアンテナはスーパーゲインアンテナと呼ばれるが、上記の状態はそれに当たると言えるであろう。理論上はそうなのであるが、実際には、アンテナインピーダンスの変化に対する整合問題や、アレーアンテナとしての帯域が狭くなる（＝Q値が上がる）などの弱点もある。間隔を狭くするほど困難（＝無理）が出てくると言う意味であり、実用に際しては細心の注意が必要である。

なお、エンドファイアアレーにおいて、共相給電に対して、少し位相差をつけた方が、より高い利得が得られることが知られている。Nが大きいときの大雑把な付加位相とし、素子の両端でπ 差がつくよう均等に割り振るのである。これはハンセン・ウッドヤード条件と呼ばれている。当然ながら、共相給電利得と最大利得の中間になるもので、効果の比較は読者にお任せしたい。

参考文献

[1] 唐沢好男, “近接素子配置におけるアレーアンテナの利得について（改訂版）,” YK-063_rev, 2022.03.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_063_Array_Antenna_Gain.pdf

[2] M. T. Ma, Theory and application of antenna arrays, John Wiley & Sons, 1974.

[3] 澤谷邦男（編）, アンテナ工学ハンドブック（第２版）, 信学会/オーム社, 2008.

[4] A. Thumvichit, T. Takano, and Y. Kamata, “Characteristics verification od half-wave dipole very closed to a conducting plane with excellent impedance matching,” IEEETrans. Antennas. Propagat., vol. 55, no. 1, pp. 53-58, 2007.