

WSSUS 通信路

～Bello 論文への温故知新～

唐沢 好男

1. はじめに

線形時変通信路 (time-variant linear channel) を WSSUS (Wide-Sense Stationary Uncorrelated Scattering, 広義定常無相関散乱) 確率過程でモデル化したのは Bello (1963) [1] であり、この思想が、今日の移動伝搬チャネルモデル (多重波伝搬理論) の基礎になっている。Bello はその論文の中で、このモデル化には、Zadeh (1950) [2] と Kailath (1959) [3] の研究を下敷きにしていることを述べている。また、独立に、Gersho (1963) [4] の研究があったことも述べている。

Bello の論文[1]は、34 ページの大作で、取り扱われている通信路表現 (システム関数) も多岐に亘るため、読みこなすには骨が折れる。そのエッセンスは、Parsons の移動伝搬の専門書[5]にまとめられていてこちらはわかりやすいが、簡潔すぎて物足りなさがある。

本資料は、Bello 論文[1] (特にその前半部である I～IV 節) に提示されている WSSUS の通信路の考え方と関連諸量の数式とその導出過程を、できるだけ丁寧にまとめている。Bello 論文に行き詰まったとき、その理解の手助けになればと願う。Bello が編み出した通信路モデルは、マルチパス伝搬遅延やドップラー周波数偏移のばらつきによって生じる時間・周波数領域での二重選択性フェージング環境でのデジタル伝送特性把握に不可欠なものであり、現代に生きる古典理論と位置づけられる。なお、Bello 論文では、通信路を表す様々システム関数が定義され、かつそれらには多数の変数が現れる。本資料では、これらの関数や変数を踏襲するが、その表記についてはより直感的にわかりやすいものに置き換えている。原著論文と読み比べる際の混乱を避けるため、表 1 にこの置き換えをまとめている。

2. 前提条件

実際の無線通信では、送信機から送り出される信号も、受信機で受け取る信号も実数信号であり、かつ、搬送波周波数 f_c に乗った帯域通過系信号である。送信信号についてみれば、I, Q の複素平面上で表現されるベースバンド信号 $x(t)$ に対して、送り出される信号 $s(t)$ は次式の形になる。

$$s(t) = \text{Re}\{x(t)e^{j2\pi f_c t}\} \quad (1)$$

ここで、 $\text{Re}\{\cdot\}$ は、実数部を表す。

本稿 (および Bello 論文) では、送受信信号や通信路の記述は、 $x(t)$ にベースバンド系 (等価低域通過系) で表す。信号表現には、等価低域通過系 (複素数)、帯域通過系 (実数)、解析信号 (複素数) が有り、これらの関係については、例えば、[6] (図 4. 8) などを見てほしい。

表 1 各種関数および変数の Bello 論文と本稿との対応

(Bello 論文には、さらに多数の関数が出てくるが、本稿で使用していないものは省略)

Bello論文	本稿
$z(t)$	送信信号の時間領域表現 $x(t)$
$Z(f)$	送信信号の周波数領域表現 $X(f)$
$w(t)$	受信信号の時間領域表現 $y(t)$
$W(f)$	受信信号の周波数領域表現 $Y(f)$
t	時間 t
s	時間 t'
ξ	遅延 τ
η	遅延 τ'
ν	ドップラー周波数 ν
μ	ドップラー周波数 ν'
f	周波数 f
l	周波数 f'
τ	時間差 Δt
Ω	周波数差 Δf
$g(t, \xi)$	time-variant impulse response $h(t, \tau)$
$T(f, t)$	time-variant transfer function $T(f, t)$
$G(f, \nu)$	frequency-domain function $H(f, \nu)$
$U(\xi, \nu)$	delay-Doppler spread function $S(\tau, \nu)$
$R_g(t, s; \xi, \eta)$	$R_h(t, t'; \tau, \tau')$
$R_T(f, l; t, s)$	$R_T(f, f'; t, t')$
$R_G(f, l; \nu, \mu)$	$R_H(f, f'; \nu, \nu')$
$R_U(\xi, \eta; \nu, \mu)$	$R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu')$
$P_g(\tau, \xi)$	$P_h(\Delta t, \tau)$
$R_T(\Omega, \tau)$	$R_T(\Delta f, \Delta t)$
$P_G(\Omega, \nu)$	$P_H(\Delta f, \nu)$
$P_U(\xi, \nu)$	$P_S(\tau, \nu)$

2. 1 入出力を結ぶカーネル関数

送信信号の時間領域表現と周波数領域表現をそれぞれ、 $x(t)$, $X(f)$ 、その受信信号を $y(t)$, $Y(f)$ とする。 $x(t)$ と $X(f)$ および、 $y(t)$ と $Y(f)$ は、それぞれフーリエ変換で結ばれる。これらの入出力信号は四つのカーネル関数を用いて次式で表される。

$$y(t) = \int x(t') K_1(t, t') dt' \quad (2a)$$

$$y(t) = \int X(f) K_3(t, f) df \quad (2b)$$

$$Y(f) = \int X(f') K_2(f, f') df' \quad (2c)$$

$$Y(f) = \int x(t)K_4(f, t)dt \quad (2d)$$

各式の積分範囲を省いているが、一般的には、 $-\infty \sim \infty$ である。図1は上記の関係をまとめている。3節で述べるシステム関数の導出は、これらのカーネル関数を、時間領域の変数である経過時間 t と遅延時間 τ 、通信周波数 f とドップラー周波数 ν を用いて具体的に定めてゆくことに相当する。

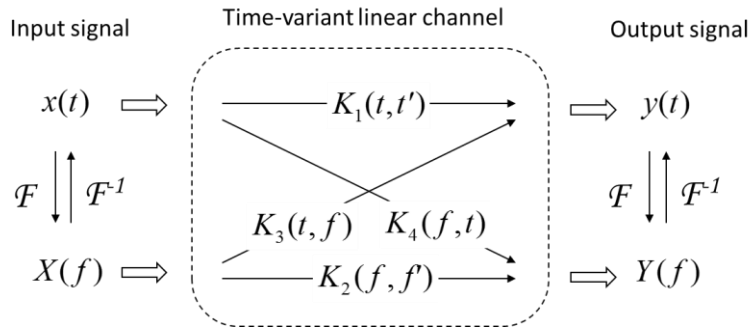


図1 入出力信号を結びつけるカーネル関数

2. 2 二つのシステム関数系

カーネル関数のように、入力信号と出力信号を結びつける関数をシステム関数と呼ぶ。Bello論文では、遅延とドップラー偏移が共に存在する通信路において、遅延が先かドップラー偏移が先かで決まる二つのシステム関数系を並列に議論している。

図2(a)に示す通信路を考える。無線機Aは固定。Bは一定速度で移動しているとする。Aを送信、Bを受信とするときの受信信号 $y^{(B)}(t)$ 、およびBを送信、Aを受信とするときの $y^{(A)}(t)$ は、通信路のインパルス応答 $h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau)$ 、 $h^{(B \rightarrow A)}(t, \tau)$ を介して、次式の畳み込み積分で表される。

$$y^{(B)}(t) = \int x(t - \tau) h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau) d\tau \quad (3a)$$

$$y^{(A)}(t) = \int x(t - \tau) h^{(B \rightarrow A)}(t, \tau) d\tau \quad (3b)$$

送信信号が同じ場合、 $y^{(B)}$ と $y^{(A)}$ は同じなのだろうか？もし同じであれば、二つのリンクに可逆定理（あるいは相反定理）が成立していることになる。

最も単純な通信路は、直接波のみが伝達する単一パス通信路である。図2(b)の等価回路が示すように、周波数偏移 ν_0 はB側で発生しているので、 $A \rightarrow B$ では遅延 τ_0 とドップラーの発生順番は遅延が先・ドップラーが後、 $B \rightarrow A$ ではその逆である。このとき、それぞれのインパルス応答は次式となる。

$$h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau) = a_0(t) \exp(j2\pi\nu_0 t) \delta\{\tau - \tau_0(t)\} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} h^{(B \rightarrow A)}(t, \tau) &= a_0(t) \exp[j2\pi\nu_0\{t - \tau_0(t)\}] \delta\{\tau - \tau_0(t)\} \\ &= \exp\{-j2\pi\nu_0\tau_0(t)\} h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau) = h^{(A \rightarrow B)}(t - \tau_0, \tau) \end{aligned} \quad (4b)$$

ここで、 δ は Dirac のデルタ関数、 a_0 は両リンクに共通する複素振幅係数である。

パス数 L 、パス i の複素振幅、遅延量、ドップラー周波数を、それぞれ、 a_i, τ_i, ν_i とするマルチパス環境 (図 2 (c)) においては、それぞれのインパルス応答は次式となる。

$$h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau) = \sum_{i=1}^L a_i(t) \exp(j2\pi\nu_i t) \delta(\tau - \tau_i) \quad (5a)$$

$$h^{(B \rightarrow A)}(t, \tau) = \sum_{i=1}^L a_i(t) \exp\{j2\pi\nu_i(t - \tau_i)\} \delta(\tau - \tau_i) = h^{(A \rightarrow B)}(t - \tau, \tau) \quad (5b)$$

上記二つの式は異なるものであり、遅延とドップラーが共に存在する環境では相反定理は成立しない (関連議論は[6],[7]に)。では、近似的に成立するとみなせる条件はどうであろうか。

(5a, b) 式の比較により、 $\langle (\nu_i \tau_i)^2 \rangle \ll 1$ となればよいことがわかる。さらに、ドップラーや遅延

の平均値 (ν_m, τ_m) は、受信側でその影響を取り除くことができるので、伝送信号に違いが生じる要因はその不規則変動分で、

$$\langle \{(f_{di} - f_m)(\tau_i - \tau_m)\}^2 \rangle = \sigma_\nu^2 \sigma_\tau^2 \ll 1 \quad (6)$$

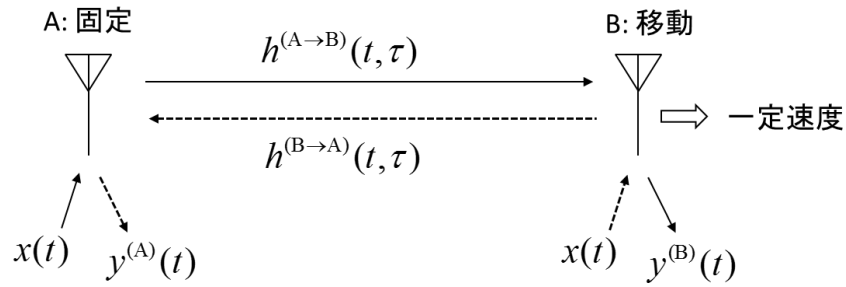
であればよい。ここで、 σ_ν, σ_τ は周波数変動と遅延変動の標準偏差で、それぞれ、ドップラースプレッド、遅延スプレッドと呼ばれる。また、両者の積 $\sigma_\nu \sigma_\tau$ はスプレッドファクタと呼ばれる。(スプレッドファクタについては、6. 3 節で取り上げる)。(6)式は、相反定理が近似的に成立する条件として、次式のようにも書ける。1 より十分小さい値として、0.01 程度を目安とすればよいであろう。

$$\sigma_\nu \sigma_\tau \ll 1 \rightarrow \sigma_\nu \sigma_\tau \leq 0.01 \quad (7)$$

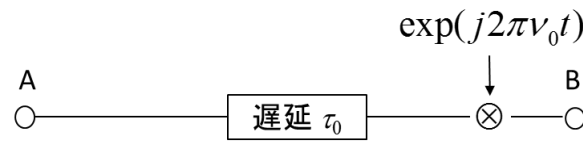
Bello 論文では、遅延とドップラーの発生順が入れ替わる二つの系を並べてこれらを比較しながらまとめている。この書き方は、厳密性において優れているが、関数や変数が多数現れることによって煩雑になり、理解を難しくもしている。そこで、次節では、次の二つの理由により $A \rightarrow B$ の通信路 (すなわち、遅延の発生が先でドップラーが後) に対応する系のみのシステム関数を取り上げる。

i) 現実の無線回線においては、スプレッドファクタの値は 0.001 以下であり、近似的に相反定理が成立する条件にある。すなわち両者の違いは無視できるほどに小さい。

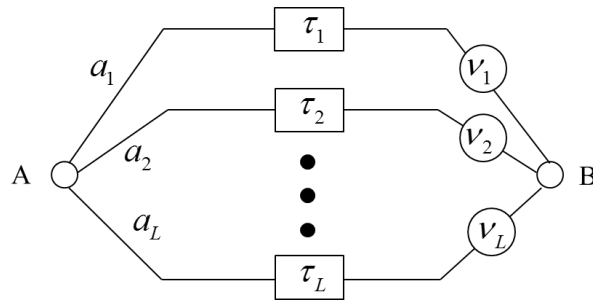
ii) 最終目的である WSSUS 通信路においては、基本要素である各種相関特性は両系において同じになり [1]、一方の理解で十分である。



(a) 一方が固定・一方が移動する通信路



(b) 単一パスの通信路の等価回路



(c) マルチパス通信路の等価回路（ドップラー偏移では(b)の記載を簡略化）

図2 遅延とドップラー偏移が共に存在する通信路とその等価回路表現

Note: 英語の **channel** に相当する和名は、伝送路、通信路、伝搬路などがある。「伝送路」は言葉に包容力があり、「伝搬路」は送受アンテナ間の物理空間伝送路（アンテナ特性を含めた）、「通信路」は送受信信号間の伝送路（送受信フィルタの特性を含んだ）のニュアンスがある。ただし、本稿では、通信路を多用し、厳密な使い分けをしてはいない（むしろ伝搬路に近い）。

3. システム関数

通信路の状態は、時間領域と周波数領域のそれぞれの2つの変数：“遅延 τ と時間変動 t ”，“信号帯域に関わる周波数 f とドップラー周波数 ν ”の合計4つの変数で表される。図3はこれを整理している。物理的には、伝搬遅延量の広がり（ばらつき）によって τ と f が対に、ドップラー偏移の広がりによって t と ν が対になる。この二つの伝搬要因（遅延広がりとドップラー偏移広がり）は独立な現象と見なすことができるので、同じ時間領域であっても τ と t は、また、同じ周波数領域であっても f と ν による信号の変動は無相関として扱うことができる。

システム関数（system function）は、入力信号と出力信号を結びつけるカーネル関数を、この4つの変数を組み合わせて具体的に表したものである。同じ物理要因で生まれる t と ν 、 τ と f のそれぞれのどちらかを選んだ2変数の関数は、式(2)で示したカーネル関数と同じく四つ存在する。



図3 時間領域と周波数領域表現の四つの変数の関係

時変インパルス応答： $h(t, \tau)$

(3a)式の $h^{(A \rightarrow B)}(t, \tau)$ を $h(t, \tau)$ と置きなおすと、同式は次式の畳み込み積分となる。

$$y(t) = \int x(t - \tau) h(t, \tau) d\tau \quad (8)$$

上式と(2a)式との対応から、 $t' = t - \tau$ であり、

$$h(t, \tau) = K_1(t, t - \tau) \quad (9)$$

となって、 $h(t, \tau)$ はカーネル関数 K_1 に関係付けられる。 $h(t, \tau)$ は時変インパルス応答（time-variant impulse response）であり、Bello論文ではinput delay-spread functionと名付けられている。[note: Bello論文での“input”の意味は、遅延広がり先という意味。本稿では述べないもう一つのシステム関数（図2の $B \rightarrow A$ 通信路）はoutput delay-spread functionと名付けて区別している。]

時変伝達関数： $T(f, t)$

遅延の広がり（ばらつき）は周波数特性の変動をもたらす。遅延時間の変数 τ を周波数の変数 f で表すと、すなわち、 $h(t, \tau)$ を τ についてフーリエ変換すると時変伝達関数（frequency-variant transfer function）

$T(f, t)$ が得られる。

$$T(f, t) = \int h(t, \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (10)$$

出力信号 $y(t)$ は、入力信号 $X(f)$ と $T(f, t)$ とにより、次式で表される。

$$y(t) = \int X(f) T(f, t) e^{j2\pi f t} df \quad (11)$$

上式と式(2b)との比較により、 $T(f, t)$ はカーネル関数 K_3 と次式で結ばれる。

$$T(f, t) = K_3(t, f) e^{-j2\pi f t} \quad (12)$$

周波数領域関数： $H(f, \nu)$

時変伝達関数 $T(f, t)$ のドップラー広がりにより生じる時間変数 t をフーリエ変換して周波数変数 ν に換えると、二つの周波数を変数とする新たなシステム関数 $H(f, \nu)$ が得られる。

$$H(f, \nu) = \int T(f, t) \exp(-j2\pi \nu t) dt \quad (13)$$

このシステム関数は周波数領域関数 (frequency-domain function) であり、Bello 論文では output Doppler-spread function と名付けられている。

出力信号 $Y(f)$ は、入力信号 $X(f)$ と $H(f, \nu)$ との畳み込み積分により、次式で表される。

$$Y(f) = \int X(f - \nu) H(f, \nu) d\nu \quad (14)$$

上式と、カーネル関数を用いた表記である式(2c)と比べると、 $f' = f - \nu$ であるので、 $H(f, \nu)$ は

$$H(f, \nu) = K_2(f, f - \nu) \quad (15)$$

と対応付けられる。[note: Bello 論文の(15)式では $H(f, \nu) = K_2(f + \nu, f)$ (Bello 論文の $G(f, \nu)$ が本稿の $H(f, \nu)$ に対応しているので注意) となっており、この違い要確認]

遅延・ドップラースプレッド関数： $S(\tau, \nu)$

時変インパルス応答 $h(t, \tau)$ のドップラー広がりにより生じる時間変数 t をフーリエ変換して周波数変数 ν に換えると、新たなシステム関数 $S(\tau, \nu)$ が得られる。

$$S(\tau, \nu) = \int h(t, \tau) e^{-j2\pi \nu t} dt \quad (16)$$

周波数領域関数 $H(f, \nu)$ の遅延広がりにより生じる周波数変数 f を逆フーリエ変換して時間変数 τ に換えることによってもシステム関数 $S(\tau, \nu)$ が得られる。

$$S(\tau, \nu) = \int H(f, \nu) \exp(j2\pi f \tau) df \quad (17)$$

このシステム関数は遅延ドップラースプレッド関数 (delay-Doppler-spread function) と呼ばれている。

四つのシステム関数の関係

上述のとおり、四つのシステム関数は、変数一つの変換についてフーリエ変換・逆変換の形で結び付けられる。図4はこの関係をまとめている。

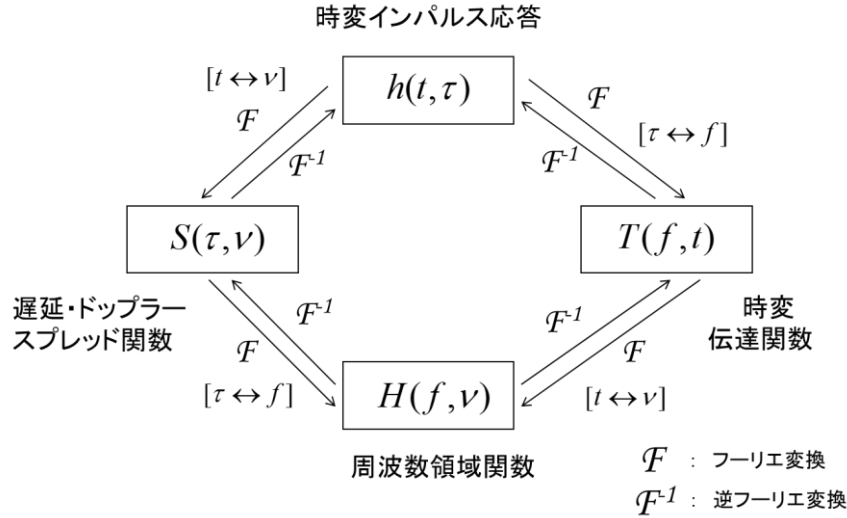


図4 四つのシステム関数と相互の関係 (Bello 論文の Fig.5 の左側図面に対応)

4. 通信路相関関数

システム関数は、通信路の確定的な状態 (deterministic state) を表す関数であるため、入出力信号の表現に用いられる。これに対して、統計的な状態を表現したいとき、本節の相関関数が用いられる。

4つのシステム関数に対して、それぞれ、以下で定義される統計量を考える。この統計量は相関特性の性質を持つので、通信路相関関数 (channel correlation function) と呼ばれる。

$$R_h(t, t'; \tau, \tau') \equiv \langle h^*(t, \tau) h(t', \tau') \rangle \quad (18a)$$

$$R_T(f, f'; t, t') \equiv \langle T^*(f, t) T(f', t') \rangle \quad (18b)$$

$$R_H(f, f'; \nu, \nu') \equiv \langle H^*(f, \nu) H(f', \nu') \rangle \quad (18c)$$

$$R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu') \equiv \langle S^*(\tau, \nu) S(\tau', \nu') \rangle \quad (18d)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は期待値 (あるいはアンサンブル平均) である。

例えば、 R_T をさらに書き換えると

$$R_T(f, f'; t, t') \equiv \langle T^*(f, t) T(f', t') \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \langle h^*(t, \tau) h(t', \tau') \rangle e^{j2\pi(\tau f - \tau' f')} d\tau d\tau' \\
&= \iint R_h(t, t'; \tau, \tau') e^{j2\pi(\tau f - \tau' f')} d\tau d\tau' \quad (19)
\end{aligned}$$

となつて、 R_h の二重フーリエ変換で表される。同様に、上記の四つの統計量は、 $R_h \Leftrightarrow R_T \Leftrightarrow R_H \Leftrightarrow R_S \Leftrightarrow R_h$ の隣接間で、二重フーリエ変換・逆変換の関係になる。図5はこの関係を示している。

ここで導入した通信路相関関数は、以下の例に見られるように、受信信号の相関特性を求める際に役立つものである。

$$R_y(t, t') \left(\equiv \langle y^*(t) y(t') \rangle \right) = \iint R_x(t - \tau, t' - \tau') R_h(t, t'; \tau, \tau') d\tau d\tau' \quad (20a)$$

$$R_x(t, t') \equiv \langle x^*(t) x(t') \rangle$$

$$R_Y(f, f') \left(\equiv \langle Y^*(f) Y(f') \rangle \right) = \iint R_X(f - \nu, f' - \nu') R_H(f, f'; \nu, \nu') d\nu d\nu' \quad (20b)$$

$$R_X(f, f') \equiv \langle X^*(f) X(f') \rangle$$

しかしながら、(18)式や(20)式を求めたい場合には、その形が一般的過ぎて、実用的な計算式を得ることが困難である。そこで、次節で述べる WSSUS 確率過程を導入することにより、この困難を打開する。

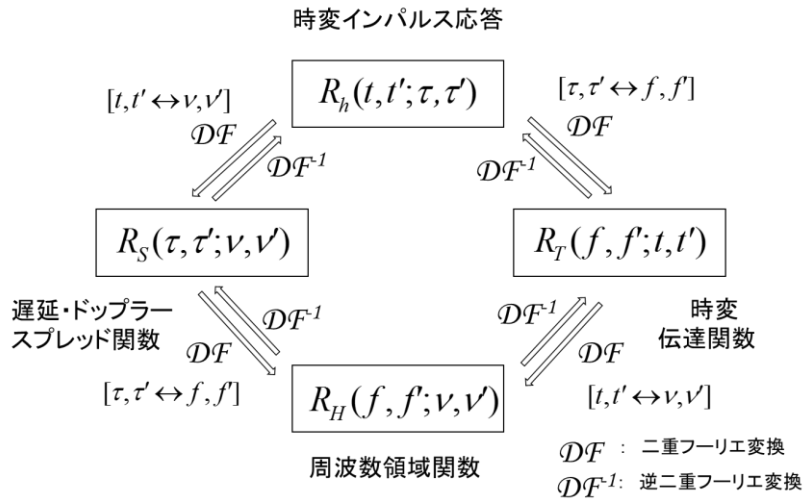


図5 通信路相関関数と相互の関係

5. WSSUS

ここでは、通信路表現を簡易にするために導入された WSSUS (Wide-Sense Stationary Uncorrelated Scattering) 確率過程の概念を述べる。WSSUS は WSS (Wide-Sense Stationary: 広義定常) と US (Uncorrelated Scattering: 無相関散乱) を併せたもので、考え方に合理性があり、かつ、これによって導かれる種々の関係式が極めて簡易になる利点がある。また、後に示すように、WSS と US には双対性 (duality) がある。

5. 1 WSS 通信路

特性が時間的に変動する通信路において、その統計的性質が任意の時間区間において同一であるとき、すなわち、統計開始の時間によらないとき、その通信路は定常 (stationary) であると言う。統計的性質のあらゆる量、すなわち任意の次数のモーメントが不変であるとき、その定常過程は狭義定常 (NSS: Narrow-Sense Stationary) であると言う。一方、相関特性など 2 次以下のモーメント (平均値、分散、相関特性など) が不変であるとき広義定常 (WSS) であると言う。ここでは、WSS の縛りを探り入れる。

これまで、相関特性 R_h と R_T の時間変数に t と t' を用いてきたが、WSS 通信路では、 $t'=t+\Delta t$ としたときの Δt のみに依存する。これにより、(18a),(18b) 式は、以下に置き換えられる。

$$R_h(t, t+\Delta t; \tau, \tau') \rightarrow R_h(\Delta t; \tau, \tau') \quad (21a)$$

$$R_T(f, f'; t, t+\Delta t) \rightarrow R_T(f, f'; \Delta t) \quad (21b)$$

さらに、 R_S と R_h の二重フーリエ変換の関係から、WSS の仮定の下、 R_S は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned} R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu') &= \iint R_h(t, t'; \tau, \tau') e^{j2\pi(\nu t - \nu' t')} dt dt' \\ &= \int e^{j2\pi(\nu - \nu')t} dt \int R_h(\Delta t; \tau, \tau') e^{-j2\pi\nu\Delta t} d\Delta t \\ &= P_S(\tau, \tau'; \nu) \delta(\nu - \nu') \end{aligned} \quad (22a)$$

$$P_S(\tau, \tau'; \nu) = \int R_h(\Delta t; \tau, \tau') e^{-j2\pi\nu\Delta t} d\Delta t \quad (22b)$$

同様に

$$R_H(f, f'; \nu, \nu') = P_H(f, f'; \nu) \delta(\nu - \nu') \quad (23a)$$

$$P_H(f, f'; \nu) = \int R_T(f, f'; \Delta t) e^{-i2\pi\nu\Delta t} d\Delta t \quad (23b)$$

WSS 通信路では、 Δt と ν に関して、(22b) 式より R_h と P_S が、(23b) 式より R_T と P_H が、それぞれ、フーリエ変換対になっている。図 6 はこの関係をまとめている。

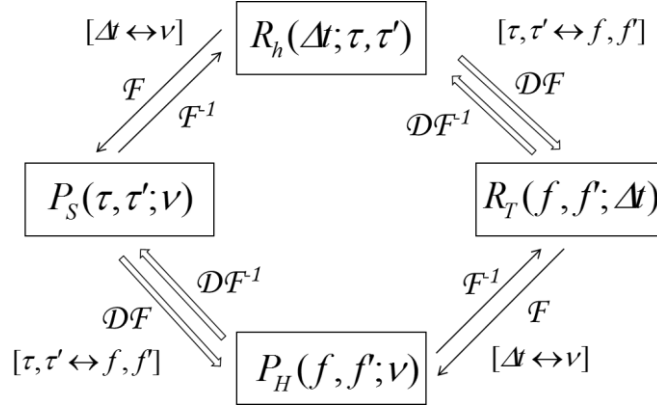


図6 WSS 通信路における相関関数の相互の関係

5. 2 US 通信路

マルチパス伝搬路においては、おのおののパス（素波と呼ばれる）は何回もの反射や回折を受けて受信点に到達している。そのため、素波の振幅・位相変動は素波ごとに伝搬劣化を受ける場所が異なるのであるから、お互いに無相関であるとみなす。それは、どんなに到来角度が近くても、遅延の値が近くても無相関であるとみなす。各パスが受ける散乱メカニズムをこのように捕らえるのが US（無相関散乱）の考え方である。

この仮定により、US 通信路では、時変インパルス応答 h の相関関数 R_h 、および、遅延・ドップラースプレッド関数 S の相関関数 R_S は、 P_h, P_S を用いてそれぞれ以下のように表される。

$$R_h(t, t'; \tau, \tau') = P_h(t, t'; \tau) \delta(\tau' - \tau) \quad (24a)$$

$$R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu') = P_S(\tau; \nu, \nu') \delta(\tau' - \tau) \quad (24b)$$

この性質を用いて、 R_T, R_H は以下のように整理される。

$$\begin{aligned} R_T(\Delta f; t, t') &\equiv R_T(f, f + \Delta f; t, t') \\ &= \iint R_h(t, t'; \tau, \tau') e^{j2\pi\{\tau - (f + \Delta f)\tau'\}} d\tau d\tau' \\ &= \iint P_h(t, t'; \tau) \delta(\tau' - \tau) e^{j2\pi\{\tau f - \tau'(f + \Delta f)\}} d\tau d\tau' \\ &= \int P_h(t, t'; \tau) e^{-j2\pi\tau\Delta f} d\tau \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned}
R_H(\Delta f; \nu, \nu') &\equiv R_H(f, f + \Delta f; \nu, \nu') \\
&= \iint R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu') e^{j2\pi\{f\tau - (f + \Delta f)\tau'\}} d\tau d\tau' \\
&= \iint P_S(\tau; \nu, \nu') \delta(\tau' - \tau) e^{j2\pi\{f\tau - (f + \Delta f)\tau\}} d\tau d\tau' \\
&= \int P_S(\tau; \nu, \nu') e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau
\end{aligned} \tag{25b}$$

(25)式より、 R_T は P_h の、 R_H は P_S のフーリエ変換であることがわかる。図7は、相関関数に関する US 通信路の相互の関係をまとめている。

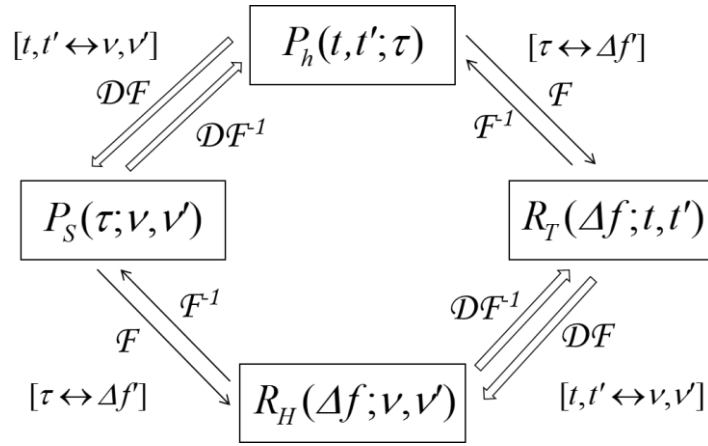


図7 US 通信路における相関関数の相互の関係

5. 3 WSSUS 通信路

図6と図7の関係からも明らかなように、WSS と US はドップラー変数 ν と遅延変数 τ との双対 (duality) になっている。その両方を取り入れた概念が WSSUS である。WSSUS 通信路では、各相関関数は、以下のように整理される。

$$R_h(t, t + \Delta t; \tau, \tau') = P_h(\Delta t, \tau) \delta(\tau' - \tau) \tag{26a}$$

$$R_T(f, f + \Delta f; t, t + \Delta t) = R_T(\Delta f, \Delta t) \tag{26b}$$

$$R_H(f, f + \Delta f; \nu, \nu') = P_H(\Delta f, \nu) \delta(\nu' - \nu) \tag{26c}$$

$$R_S(\tau, \tau'; \nu, \nu') = P_S(\tau, \nu) \delta(\nu' - \nu) \delta(\tau' - \tau) \tag{26d}$$

上記および、図6、図7の関係より、統計的性質を表す4つの関数 P_h, R_T, P_H, P_S はフーリエ変換・逆変換で結ばれ図8となる。

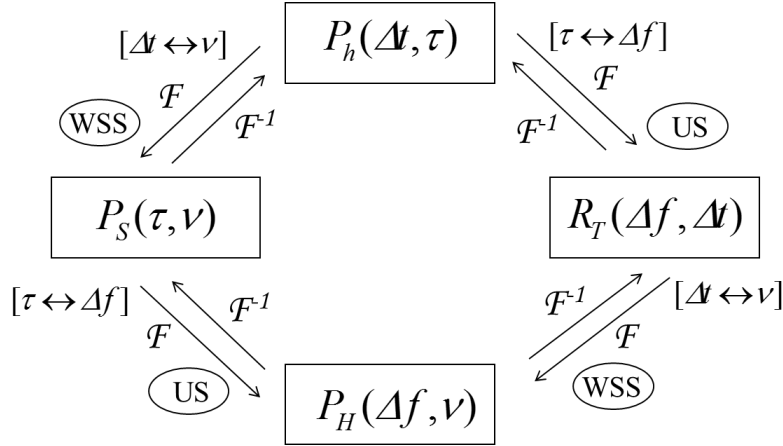


図8 WSSUS 通信路における相関関数の相互の関係

6. WSSUS 通信路の性質

WSSUS 通信路は、ドップラー周波数広がりに伴う時間領域での変動に WSS の、遅延広がりに伴う周波数領域での変動に US の概念を取り入れたモデルである。このモデルは、移動体環境での広帯域情報伝送が志向されている今日的環境における、情報伝送解析の基礎を与えている。ここでは、遅延広がり起因する周波数選択性フェーディング (frequency-selective fading)、ドップラー広がり起因する時間選択性フェーディング (time-selective fading あるいは fast fading)、その両者が重なった時間・周波数領域の二重選択性フェーディング (double-selective fading) の性質をまとめる。

6. 1 周波数選択性フェーディング

時変インパルス応答の相関特性 R_h の要素である $P_h(\Delta t, \nu)$ に着目する。 $P_h(0, \nu)$ とすると、(18a) 式および(26a)式より、遅延プロファイル (Bello 論文では delay power density spectrum) $p(\nu)$ を与える。

$$p(\nu) \equiv P_h(0, \nu) = \langle h(t, \nu)^* h(t, \nu) \rangle \quad (27)$$

伝送特性の統計的性質 (例えば平均ビット誤り率: BER) の評価においては、遅延のばらつきの標準偏差である遅延スプレッド σ_τ が重要なパラメータであり、以下で求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= \sqrt{\langle (\tau - \tau_m)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{P_R} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \tau^2 p(\tau) d\tau - \tau_m^2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{where } P_R = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p(\tau) d\tau \quad (\text{平均電力})$$

$$\tau_m = \frac{1}{P_R} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \tau p(\tau) d\tau \quad (\text{平均遅延})$$

時変伝達関数 $T(f,t)$ の相関関数 (time-frequency correlation function) $R_T(\Delta f, \Delta t)$ は

$$R_T(\Delta f, \Delta t) = \langle T^*(f, t) T(f + \Delta f, t + \Delta t) \rangle \quad (29)$$

であるので、 $\Delta t=0$ と置いた $R_T(\Delta f, 0)$ は周波数相関特性 $\rho_f(\Delta f)$ を与える。

$$\rho_f(\Delta f) \equiv R_T(\Delta f, 0) = \langle T^*(f, t) T(f + \Delta f, t) \rangle \quad (30)$$

無相関散乱 (US) の仮定により周波数相関 $\rho_f(\Delta f)$ と遅延プロファイル $p(\tau)$ は次式で結ばれるフーリエ変換対である。

$$\rho_f(\Delta f) = \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} p(\tau) e^{-j2\pi\Delta f\tau} d\tau \quad (31)$$

市街地や屋内のマルチパス環境では、多くの測定データや、また、その理論的な考察から、遅延プロファイルは以下に与えられる指数関数型プロファイルが規範モデルになっている。

$$p(\tau) = \frac{P_R}{\sigma_\tau} e^{-\tau/\sigma_\tau} \quad (32)$$

このとき、周波数相関特性は次式になる。

$$\rho_f(\Delta f) = \frac{1 - j2\pi\Delta f\sigma_\tau}{1 + (j2\pi\Delta f\sigma_\tau)^2} \quad (33a)$$

$$|\rho_f(\Delta f)|^2 = \frac{1}{1 + (j2\pi\Delta f\sigma_\tau)^2} \quad (33b)$$

通信帯域内が周波数選択性であるかどうかの目安を与える数値として相関帯域幅 (correlation bandwidth あるいは coherent bandwidth) B が用いられ、 $|\rho_f|^2=0.5$ を与える Δf を B とすることが多い。この場合は

$$B = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau} \quad (34)$$

となる。

ただし、この決め方は、しきい値 (上記では 0.5 とした) の与え方や遅延プロファイルの形状依存性があり、あくまで目安である。デジタル伝送特性 (符号間干渉の BER 特性など) では、遅延スプレッド σ_τ との対応性がよく、周波数相関特性でこれに対応するものは、以下の関係式で

与えられる $\Delta f=0$ 付近での 2 階微分値である ([6] の p.92)。

$$\left. \frac{\partial^2 |\rho_f(\Delta f)|^2}{\partial \Delta f^2} \right|_{\Delta f=0} = -8\pi^2 \sigma_r^2 \quad (35)$$

6. 2 時間選択性フェージング

時変伝達関数の相関関数の $\Delta f=0$ とした $R_T(0, \Delta t)$ は自己相関特性 (auto-correlation function) $\rho_t(\Delta t)$ を与える。

$$\rho_t(\Delta t) \equiv R_T(0, \Delta t) = \langle T^*(f, t) T(f, t + \Delta t) \rangle \quad (36)$$

前述の相関帯域幅と同じ意味合いで、 $|\rho_t|=0.5$ とする Δt を相関時間 T_c が定まる。

広義定常 (WSS) 確率過程において、自己相関関数のフーリエ変換はドップラー電力スペクトル (Doppler power density spectrum) $H(\nu)$ を与える。

$$H(\nu) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} \rho_t(\Delta t) e^{-j2\pi\nu\Delta t} d\Delta t \quad (37)$$

この関係は、ウィーナー・ヒンチンの定理として知られている。

遅延スプレッドと同じ意味合いで、ドップラー広がり標準偏差：ドップラーズプレッド (Doppler spread) を次式により定められる。

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= \sqrt{\langle (\nu - \nu_m)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{P_R} \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} \nu^2 H(\nu) d\nu - \nu_m^2} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{where } P_R = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} H(\nu) d\nu \quad (\text{平均電力})$$

$$\nu_m = \frac{1}{P_R} \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} \nu H(\nu) d\nu \quad (\text{平均ドップラー周波数})$$

ドップラースペクトルの規範モデルとして、水平面の角度から一様に電波が到来するプロファイル (市街地などでの移動体受信を想定) が一般的に用いられる。この場合、ドップラー電力スペクトルは次式で与えられる。

$$H(\nu) = \frac{P_R}{\pi \nu_D \sqrt{1 - (\nu / \nu_D)^2}} \quad (39)$$

このときのドップラースプレッドは、

$$\sigma_v = \nu_D / \sqrt{2} \quad (40)$$

となる。ここで、 ν_D は最大ドップラー周波数(=速度/波長)である(f_D で表記されることが多い)。自己相関特性は、次式となる(J_0 は0次第一種ベッセル関数)。

$$\rho_t(\Delta t) = J_0(2\pi\nu_D\Delta t) \quad (41)$$

6. 3 時間・周波数領域での二重選択性フェージングと今日の問題

近年、ワイヤレス情報通信では広帯域化(大容量化)が志向され、それに伴って、伝搬遅延のばらつきの影響を受けやすくなっている。これは、符号間干渉問題として現れ、その対策が求められる。最も効果的な対策はOFDMであり、キャリア当たりの狭帯域化を目指したものである。このことによって、実効シンボル周期が長くなり、遅延広がり問題は緩和される。その一方で、もう一つの伝搬問題であるドップラー広がり影響が現れてくる。このような、時間・周波数領域の両方で影響が現れるマルチパス伝搬環境は二重選択性フェージングと呼ばれる。

情報を時間・周波数領域の塊(シンボル)単位で送りたい場合、その塊の伝送中は、時間的変動も周波数的変動もない静的な状態が求められる。その塊の実効的な時間間隔を T_e とすると、良好に情報を伝送するためには、以下の条件を満たす必要がある[6]。

$$\sigma_\tau \ll T_e \ll 1/\sigma_v \quad (42)$$

電波伝搬の環境に対して、良好な通信を実現するためには

$$\sigma_v \sigma_\tau \ll 1 \quad (43)$$

の条件が求められる。幸い、現在、サービス中のワイヤレス通信の伝搬環境(通信周波数や移動体速度)では、その大部分が $\sigma_v \sigma_\tau < 0.01$ (例えば、 $\sigma_\tau = 10\mu\text{s}$, $\sigma_v = 1\text{kHz}$ に相当) であるので、設計可能範囲には収まっている。

上式に現れている「ドップラーの広がり」と「遅延の広がり」の積はスプレッドファクタ(spread factor)と呼ばれている[8]。スプレッドファクタについては、以下の二つの定義がある。

$$\alpha_1 \equiv (\nu_{\max} - \nu_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min}) \quad (44a)$$

$$\alpha_2 \equiv \sigma_v \sigma_\tau \quad (44b)$$

通信路特性の評価にスプレッドファクタが陽に現れてくるケースは以下のような場合である。

1) 情報伝送の容量限界：通信路容量

シャノンは熱雑音(ガウス性雑音)の存在する通信路での容量(通信路容量) C を

$$C = W_s \log_2(1 + \Gamma_0) \quad [\text{bps}] \quad (45)$$

で与えている。ここで、 W_s は通信路の帯域幅、 Γ_0 は信号と雑音の平均電力比（SN 比）である。二重選択性フェージング環境での通信路容量に対しては Durisi 等によりスプレッドファクタ α_1 をパラメータとして理論的な解析（情報理論的アプローチ）が行われている[9]。筆者等も、伝搬モデル的視点からの解析によって、 α_2 を変数として次式を導いている[10],[11]。

$$C \approx W_s \log_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\Gamma_0} + 8\pi^2 \alpha_2} \right) \quad (46)$$

2) BER の限界値：軽減困難なビット伝送誤り（BER のフロア値）

SN 比を高めても軽減できないビット伝送誤りを軽減困難な誤り（irreducible error）と呼ぶ。遅延の影響やドップラーの影響による波形ひずみはその誤りを引き起こす。遅延の広がりがある原因の場合には、BER のフロア値は遅延スプレッド σ_r の関数で表される。一方、ドップラー広がりによる劣化が主体である場合には、ドップラーズプレッド σ_v の関数で表される。(42)式からもわかるように、実効シンボル周期 T_e を最適に設計することにより、BER フロアの発生も最小値に抑えることができるが、そのときの BER のフロア値はスプレッドファクタ α_2 の関数になる（例えば、[12],[13]）。

3) 受信再生クロックのサイクルスリップ

二重選択性フェージング環境でのデジタル信号伝送では、受信機で再生するクロック信号がフェージングの変化にだまされて情報信号のシンボル長を超えてずれてゆく現象があり、再生クロックのサイクルスリップと呼ばれている[14]。サイクルスリップが発生すると信号の同期が失われることになり、以降、再同期が確立するまでバースト誤りが継続する。レイリーフェージング環境では、一秒当たりのサイクルスリップの発生回数 N_s は次式で与えられる[6],[15]。

$$N_s = 2\pi\alpha_2 / T_s \quad (47)$$

4) 遅延・ドップラー同時測定の可能性

レーダなどで、ターゲットのレンジングと移動速度を同時に測りたい場合の条件として、 $\alpha_1 < 1$ があり[8]、レーダ信号の設計（周波数や符号化）に指針を与えている。

5) 通信路の相反定理の成立条件

本稿の 2. 2 節で述べたように、遅延発生とドップラー発生が縦列に接続される通信路（発生に前後関係がある通信路）では、厳密な意味で、通信路の相反定理が成立しない。近似的に成立する条件が $\alpha_2 \ll 1$ である[6]。

このように、今日的な問題への対処のためにも、二重選択性フェージング環境における伝送特性把握の基礎となる WSSUS 通信路の性質の理解が重要である。図 9 は、本稿で取り上げている種々の物理量についてそれらの関係を整理してまとめている。

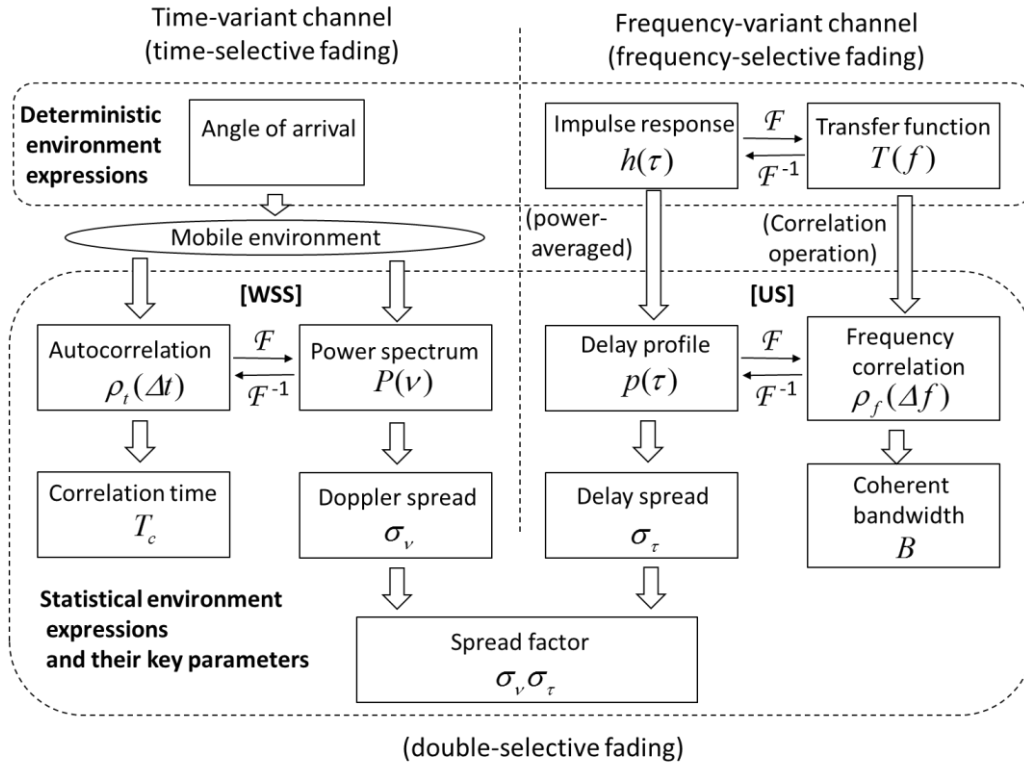


図 9 WSSUS 概念から導かれる諸量の関連

7. むすび

ワイヤレス通信路に WSSUS の概念を取り入れた Bello の論文[1]を筆者なりに読み込み、次世代の技術者・研究者の更なる理解に役立つことを願って、大学院レベルの教科書風にまとめた。原著論文では、遅延とドップラーの発生順序に関する 2 系統のシステム関数を提示し、両者を比較しながら論じているが、本文中に書いた理由により一つの系統に絞り、首尾一貫するように整理した（そこが本資料の特徴）。本文 6 節でも述べているように、WSSUS 概念によって、伝送特性を評価するに役立つ多くの簡易な計算式が導き出されている。それゆえ、本分野のシステム開発に携わろうとする技術者には、その基礎知識としてこの概念を理解してほしいと願う。

一方、現実の世界はそう都合のよいことばかりではなく、移動通信伝搬路についての non-WSSUS の議論も行われている（例えば[16]、さらに、IEEE Xplore で、“non-WSSUS”とキーワード検索すると、結構見えてくる）。特に、US の仮定について、同一散乱体の複数個所に反射点があるような環境では、無相関散乱といえないようなケースも起きてくる。基礎をまず理解した上で、現実の世界にも目を向けてほしい。

参考文献

- [1] P. A. Bello, "Characterization of randomly time-variant linear channels," IEEE Trans. Commun. Syst., vol. CS-11, no. 4, pp. 360–393, 1963.
- [2] L. A. Zadeh, "Frequency analysis of variable networks," Proc. IRE, vol. 38, pp. 291-299, 1950.
- [3] T. Kailath, "Sampling models for linear time-variant filters," M.I.T Research Lab. of Electronics, Tech. Rep., no. 352, pp. 1-47, 1959.
- [4] A. J. Gersho, "Characterization of time-varying linear systems," Proc. IEEE, vol. 51, p. 238, Jan. 1963.
- [5] J. D. Parsons, *The Mobile Radio Propagation Channel*, Wiley, Chichester, U.K., second edition, 2000.
- [6] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.
- [7] Y. Karasawa, "On physical limit of wireless digital transmission from radio wave propagation perspective," Radio Science, vol. 51, no. 9, pp. 1600-1612, Sept. 2016.
- [8] P. A. Bello, "Measurement of random time-varying linear channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-15, no. 4, pp. 469-475, 1969.
- [9] G. Durisi, U. G. Schuster, H. Bölcskei, and S. Shamai (Shitz), "Noncoherent capacity of underspread fading channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 56, no. 1, pp. 367–395, 2010.
- [10] Y. Karasawa, "A simple formula for non-coherent capacity in highly underspread WSSUS channel," IEICE Trans. Commun., vol. E101-B, no. 5, pp. 1262-1269, 2018.
- [11] 唐沢好男, "ワイヤレス情報伝送の物理限界," Tech. Rep. YK-003 (私報), pp. 1-18, Nov. 2017.
<http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-003-Physical%20limit.pdf>
- [12] 唐沢好男, "電波伝搬的視点からのデジタル伝送特性解析," 信学技報、RSC2017-341, pp. 137-142, 2018.03.
- [13] 唐沢好男, "二重選択性フェージングにおけるBERフロア特性とシンボル長の最適設計法," Tech. Rep. YK-010 (私報), pp. 1-17, Feb. 2018.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-010_BER_floor_Analysis.pdf
- [14] S. Yoshida, S. Onoe, and F. Ikegami, "The effect of sample timing on bit error rate performance in a multipath fading channel," IEEE Trans. Vehicul. Tech., vol. VT-35, pp. 168-174, 1986.
- [15] Y. Karasawa, T. Kuroda and H. Iwai, "Cycle slip in clock recovery on frequency-selective fading channels," IEEE Trans. Commun., vol. 45, 3, pp.376-383, 1997.
- [16] G. Matz, "On non-WSSUS wireless fading channels," IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 4, no. 5, pp. 2465-2478, 2005.