

ウィシャート行列と固有値分布

唐沢 好男

無線通信では送受信の双方にアレーアンテナが具備される MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) システムが力を発揮している。また、より大規模なアレーが用いられるマッシブ MIMO への期待も高まっている。MIMO システムでは、通信路の特性が行列で表され、かつ、その要素は電波伝搬による不規則変動によるため、ランダム行列になる。通信システム全体の特性（通信路容量やビット誤り率）はランダム行列 \mathbf{A} を構成要素とする新たな行列 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ あるいは $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ (H は複素共役転置) に支配されている。この行列はウィシャート行列とよばれ、その固有値が重要な働きをする[1]。本レポートでは、このウィシャート行列とその固有値の確率分布についてまとめている。

ランダム行列の理論には数理統計学が築き上げてきた長い歴史があり、そこから生まれてきた数式(や法則)も非常に高度で、その導出の説明が筆者には手に負えないものが多い。そこで、本レポートでは、その式が持つ意味の説明に重点を置き、導出等については、ここを見ればそれが書いてあるという参考文献（特に教科書的なもの）を挙げている。

このテーマに関連したものとして、本レポートのシリーズでも YK-005, 006, 014, 016, 033, 049 ([2]~[7]) で取り上げているが、本レポートのタイトルで首尾一貫するようにまとめなおしている（記述が重複する部分もある）。

1. 正規乱数

母集団が正規分布する標本値 x の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \equiv N(\mu, \sigma^2) \quad (1)$$

パラメータ μ は平均値、 σ^2 は分散である。この確率分布を本レポートの出発点とする。

二つの母集団から取り出す x と y に関連性があるかどうかは次式による相関係数で評価する。

$$\rho = \frac{\langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle}{\sqrt{\langle (x - \mu_x)^2 \rangle \langle (y - \mu_y)^2 \rangle}} \quad (2)$$

式中の $\langle \rangle$ は期待値を表す。

相関係数は、変数 x と y の変化が完全相似形のとき 1（完全相関）、正負反転で完全相似

形するとき-1（負の完全相関）、独立なとき0（無相関）となり、この範囲（-1~1）に値を持つ。 $|\rho|$ が1を超えないことは、シュワルツの不等式により保証されている。

変数 x, y の結合確率密度関数 $f(x, y)$ を用いて、共分散 (covariance) σ_{xy}^2 を次式で定義する。

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy \quad (3)$$

相関係数 ρ は、 x, y のそれぞれの標準偏差 σ_x, σ_y より、(2)式に対応する形として次式で表される（分布の形によらない）。

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4)$$

無線通信の場合は、次式のように複素数で表される変数が使われる。

$$a = x_I + jx_Q \quad (5)$$

変数 x_I, x_Q は独立で同一な分布 (iid) で、それぞれを $N(0, \sigma^2)$ とする。このとき、複素数 a の振幅はレイリー分布に、その二乗値は指数分布する[1]。

2. ランダムベクトル

N 個の正規乱数を要素にもつランダムベクトル（列ベクトル）を次式で表す。

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N)^T \quad (\text{実数}) \quad (6a)$$

$$\mathbf{a} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N)^H \quad (\text{複素数}) \quad (6b)$$

ここで、上付き文字 T は転置を、 H は複素共役転置を表す。

次のようにして表される行列は共分散行列と呼ばれる。

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle (\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \rangle)(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \rangle)^T \rangle = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}^T \rangle \quad (7a)$$

$$\mathbf{R}_{aa} = \langle (\mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle)(\mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle)^H \rangle = \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^H \rangle - \langle \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{a}^H \rangle \quad (7b)$$

当面、 $\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}$ を考える。すなわち、

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle \quad (\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}) \quad (7c)$$

$$\mathbf{R}_{aa} = \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^H \rangle \quad (\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{0}) \quad (7d)$$

(7c), (7d)の行列は相関行列とも呼ばれる。(注：相関行列の定義には、平均値を残したものと引いたものの両方がある。(7c), (7d)の場合は、平均値が $\mathbf{0}$ (零ベクトル) であるので、相関行列でもあり、共分散行列でもある)。

行列 $\mathbf{xx}^T, \mathbf{aa}^H, \mathbf{R}_{xx}, \mathbf{R}_{aa}$ の固有値を求めてみよう。 $N \times N$ 正方行列 \mathbf{B} について、以下の方程式を満たす固有値 λ とそれに属する固有ベクトル \mathbf{e} である。

$$\mathbf{B}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \quad (8)$$

上記の方程式を満たす固有値の数は重解を含めて N 個ある。また、上記 4 つの行列は対称行列（実数形）あるいはエルミート行列（複素数形）であり、対角行列要素が非負であるので、固有値は全て非負の実数である。このうち、 \mathbf{xx}^T と \mathbf{aa}^H は行列のランクが 1 なので、一つの固有値のみが正の値を持ち、残りの $N-1$ 個は値が 0 である。その一つの固有値は、

$$\mathbf{xx}^T \rightarrow \lambda = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (9a)$$

$$\mathbf{aa}^H \rightarrow \lambda = \sum_{i=1}^N |a_i|^2 = \sum_{i=1}^N (x_{I,i}^2 + x_{Q,i}^2) \quad (9b)$$

である。

一方、相関行列 \mathbf{R}_{xx} と \mathbf{R}_{aa} はフルランクであり、 N 個の固有値 $\Gamma_1 \sim \Gamma_N$ 全てが非負の値を持つ（統計値としての固有値なので文字を Γ_i に変えている）。

$$\mathbf{R}_{xx}, \mathbf{R}_{aa} \rightarrow \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \dots \geq \Gamma_N \geq 0 \quad (10)$$

ベクトル \mathbf{x} の要素 x_i が $N(0, \sigma^2)$ で、かつ、要素間が無相関の場合は、相関行列 \mathbf{R}_{xx} の固有値は値が全て等しく σ^2 になる。このとき、行列 \mathbf{xx}^T の固有値 λ の確率分布は次式のガンマ分布になる。

$$\mathbf{xx}^T \rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu \lambda^{\nu-1} \exp(-\beta\lambda) \quad (11a)$$

$$\left(\nu = \frac{N}{2}, \beta = \frac{\nu}{N\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

ここで、 Γ はガンマ関数である。

同様にベクトル \mathbf{a} の要素 $x_{I,i}, x_{Q,i}$ が $N(0, \sigma^2)$ で、かつ、要素間が無相関の場合は、相関行列 \mathbf{R}_{aa} の固有値は値が全て等しく $2\sigma^2$ になる。このとき、行列 \mathbf{aa}^H の固有値 λ の確率分布は(11a)式と同じガンマ分布になるが、パラメータ値 ν が異なる。

$$\mathbf{aa}^H \rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu \lambda^{\nu-1} \exp(-\beta\lambda) \quad (11b)$$

$$\left(\nu = N, \beta = \frac{\nu}{2N\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

パラメータ β 中の $2\sigma^2$ を SN 比 Γ_0 に置き換えれば、レイリーフェージング環境下でのスペースダイバーシチ最大比合成時の SN 比算定の式になる ([1]の(8.3)式)。

また、ベクトル \mathbf{a} の要素 $x_{I,i}, x_{Q,i}$ が $N(0, \sigma^2)$ で、かつ、要素間が有相関の場合には、相関行

列 \mathbf{R}_{aa} の固有値は値が式(10)のように異なったものになる。このとき、行列 \mathbf{aa}^H の固有値 λ の確率分布は次式になる。(この式は、有相関スペースダイバーシチ (最大比合成) の解析において、不等電力の無相関ダイバーシチに置き換える手法 ([1]の § 8.2.2(2)) 参照)

$$\mathbf{aa}^H \rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N \Gamma_i} \sum_{i=1}^N \frac{\exp(-\lambda / \Gamma_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N \left(\frac{1}{\Gamma_j} - \frac{1}{\Gamma_i} \right)} \quad (\text{有相関}) \quad (12)$$

さらに、ベクトル \mathbf{a} の要素 x_{Li}, x_{Qi} が $N(\mu / \sqrt{2}, \sigma^2)$ 、(あるいは x_{Li} が $N(\mu, \sigma^2)$ 、 x_{Qi} が $N(0, \sigma^2)$) で、かつ、要素間が無相関の場合には、相関行列 \mathbf{R}_{aa} の固有値は、第一固有値のみが卓越したものとなり、行列 \mathbf{aa}^H の固有値 λ の確率分布は次式になる。(平均値が 0 でないとき、**非心 (non-centric)** と呼ばれる。この式は、仲上・ライスフェージング環境でのダイバーシチ (最大比合成) の解析と同じであり、 [1]の § 8.2.3 および付録 4 参照。)

$$\mathbf{aa}^H \rightarrow f(\lambda) = \frac{K}{\mu^2} \left(\frac{\lambda}{N\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}(N-1)} \exp \left\{ -K \left(\frac{\lambda}{\mu^2} + N \right) \right\} I_{M-1} \left(\frac{2K}{\mu} \sqrt{N\lambda} \right) \quad (\text{非心、無相関}) \quad (13)$$

ここで、 K は $\mu^2/(2\sigma^2)$ で定義されるライスファクタである。

3. ウィシャート行列

3. 1 ランダム行列

$N \times M$ のランダム行列 \mathbf{X}, \mathbf{A} に着目する。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{pmatrix} \quad (14a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \quad (14b)$$

要素が実数と複素数の違いを比較するときを除いて、基本的には複素数要素の \mathbf{A} を扱う。任意の行列は以下のような分解ができる。この分解は、**特異値分解 (singular value decomposition: SVD)** と呼ばれる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_r \mathbf{D} \mathbf{E}_t^H = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_{r,i} \mathbf{e}_{t,i}^H \quad (15)$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \quad \sqrt{\lambda_2} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p})$$

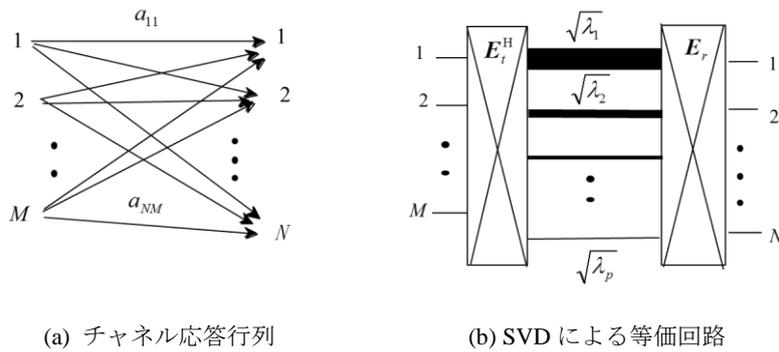
$$\mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_{t,1} \quad \mathbf{e}_{t,2} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{t,p})$$

$$\mathbf{E}_r = (\mathbf{e}_{r,1} \quad \mathbf{e}_{r,2} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_{r,p})$$

$$p \equiv \min(M, N), \quad q \equiv \max(M, N)$$

である。また、 λ_i は行列 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ （あるいは $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ ）の*i*番目の固有値（*i*は固有値の値が大きい順に $1, 2, \dots, p$ ；固有値の平方根が特異値）、 $\mathbf{e}_{t,i}$ は、固有値 λ_i に属する $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ の固有ベクトル、 $\mathbf{e}_{r,i}$ は、固有値 λ_i に属する $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の固有ベクトルである。なお、固有値は $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ でも $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ でも*p*個までは同じ値となる。一方の行列は、固有値の数が*q*であるが、 $q \geq p+1$ については、固有値の値は全て0となる（注）。

二つの固有ベクトル行列 $\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_r$ は $\mathbf{E}_t \mathbf{E}_t^H = \mathbf{I}_M, \mathbf{E}_r \mathbf{E}_r^H = \mathbf{I}_N$ となるユニタリ行列である。添え字に*t, r*をつけているのは送信側・受信側の意味を持たせている。MIMO 通信路においては、送信側アレー素子数が*M*、受信側アレー素子数が*N*になる。固有値は直交分離された*p*個の通信路（固有パス）のそれぞれの電力利得になるが、 \mathbf{E}_t はその直交化を実現する入力側（すなわち送信側）の、 \mathbf{E}_r は出力側（受信側）の回路網の係数行列を与える。図1はMIMOの通信路とSVDによる等価回路表現である。



(a) チャネル応答行列

(b) SVD による等価回路

図1 MIMO 通信路

【注】SVD をその機能を持つ数値解析ソフトで求めると正しく分解してくれる。しかし、固有ベクトルを $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の固有方程式から求めると、固有ベクトルの要素間の位相関係は正しいが、絶対位相に不確実性があり（ \mathbf{e} に対して $e^j\mathbf{e}$ も同様に固有ベクトルとしての解）、求めた $\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_r$ から元の行列を再構成したとき \mathbf{A} と一致しないことが起きる。特性的には同じものなのだけれども、完全に元に戻らないと気持ちが悪い。

3. 2 ウィシャート行列

3. 2. 1 無相関ランダム行列の場合

ランダム行列 \mathbf{X}, \mathbf{A} に対して、

$$\mathbf{W}_{xx} = \begin{cases} \mathbf{X}\mathbf{X}^H \\ \mathbf{X}^H\mathbf{X} \end{cases} \quad (16a)$$

$$\mathbf{W}_{aa} = \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}^H \\ \mathbf{A}^H\mathbf{A} \end{cases} \quad (16b)$$

で与えられる行列はウィシャート (Wishart) 行列と呼ばれる。既に SVD の説明の中にも出てきているが、 \mathbf{W}_{xx} は対称行列、 \mathbf{W}_{aa} はエルミート行列である。行列のサイズは $\mathbf{X}\mathbf{X}^H, \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ は $N \times N$ 、 $\mathbf{X}^H\mathbf{X}, \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ は $M \times M$ である。 $M > N$ では $\mathbf{X}^H\mathbf{X}, \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ に $q-p$ 個の値が 0 の固有値を、 $M < N$ では $\mathbf{X}\mathbf{X}^H, \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ に $q-p$ 個の値が 0 の固有値を含むので、ここからは、 $M \geq N$ として $\mathbf{W}_{xx} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H$ 、 $\mathbf{W}_{aa} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の q 個の (すなわち N 個の) 固有値を議論する。

SVD より

$$\mathbf{W}_{aa} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{E}_r \mathbf{D} \mathbf{E}_t^H \mathbf{E}_t \mathbf{D} \mathbf{E}_r^H = \mathbf{E}_r \mathbf{D}^2 \mathbf{E}_r^H \quad (17)$$

$$\mathbf{D}^2 = \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N)$$

となり、ウィシャート行列は対応する固有ベクトル行列を用いて、固有値を要素にもつ対角行列に変換できる。

ここでは、ウィシャート行列 \mathbf{W} の固有値の確率分布を求めることを目的とする。この問題は、1946 年の von Neumann の問いかけ以来、長年に亘って築き上げられて来た数理統計学に基礎を置くものであるため、専門的な知識がない筆者の力で式の導出を詳しく説明することはできない。手順としては、ランダム行列 \mathbf{X}, \mathbf{A} の要素の結合確率分布からウィシャート行列 \mathbf{W} への変数変換を経て、固有値の結合確率密度関数を求めて行くわけであるが、その際の変数変換のヤコビアンがうまく求められるかが鍵となる。ウィシャート行列の要素の結合確率分布は固有値の分布を含めて**ウィシャート分布**と呼ばれる。ランダムベクトル \mathbf{x}, \mathbf{a} で構成される行列 $\mathbf{x}\mathbf{x}^H, \mathbf{a}\mathbf{a}^H$ の固有値分布がガンマ分布であったので、ウィシャート分布は、ガンマ分布を多次元に拡張したものと位置づけられる。

固有値の確率分布について、ランダム行列の要素が平均値 0 の同一正規分布でかつ無相関 (iid) の場合については、それまでの研究の歴史的経緯を踏まえて 1964 年の James の論文[8]にまとめられている (\mathbf{W}_{xx} は(58)式、 \mathbf{W}_{aa} は (95) 式)。ただし、我々利用したい側からは、導出の詳細が見えずフォローするには専門の知識が求められる。実数形 \mathbf{W}_{xx} の固有値分布の導出には[9]の専門書 (教科書) で学ぶとよい (§18.6)。($\mathbf{W}_{xx}, \mathbf{W}_{aa}$ の両方については [10]に)。

固有値分布の結合確率密度関数には、固有値の大きさに順番を着けた順序付き固有値分布 f^{ord} と順序をつけない分布 f^{unord} があり、両者の関係は、

$$f^{unord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{N!} f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (18)$$

である。順序付き固有値分布 f^{ord} について結果のみを示すと以下となる。

$$\mathbf{W}_{xx} \rightarrow f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = c_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{(M-N-1)/2} \prod_{j=i+1}^N (\lambda_i - \lambda_j) \quad (19a)$$

$$\mathbf{W}_{aa} \rightarrow f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = c_2 \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i\right) \prod_{i=1}^N \lambda_i^{M-N} \prod_{j=i+1}^N (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (19b)$$

ここで、係数 c_1, c_2 は積分して 1 となるための正規化係数である（式表現略）。

二つの式を見ると、3箇所違いがある。 Σ の前の係数 $1/2$ と 1 の違いは $\langle x^2 \rangle = \langle |a|^2 \rangle$ としているため、 λ_i の累乗の違いは、実数数と複素数でのダイバーシチオーダの違いであり、ランダムベクトルで求めた式(11)の固有値の違いが現われている（実際にそうなることを式(11)と比較して確かめて欲しい）。 $(\lambda_i - \lambda_j)$ の累乗の違いは、変数変換におけるヤコビアンの違いである[9]。以下は複素数の要素で構成される \mathbf{W}_{aa} の固有値に絞って話を進める。

順序付き固有値のそれぞれの分布 f_i^{ord} は結合確率密度関数の着目する固有値 λ_i 以外の固有値に関して周辺積分することにより得られる。そのとき固有値の大小関係を考慮し、以下である。

$$f_i^{ord}(\lambda_i) = \int_{\lambda_2}^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_{\lambda_i}^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\lambda_i} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{N-1} d\lambda_N f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (20)$$

同様に、順序無し固有値の分布 f_0^{unord} は

$$\begin{aligned} f_0^{unord}(\lambda) &= \int_0^{\infty} d\lambda_1 \cdots \int_0^{\infty} d\lambda_{i-1} \int_0^{\lambda_i} d\lambda_{i+1} \cdots \int_0^{N-1} d\lambda_N f^{unord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \Big|_{\lambda_i=\lambda} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^{ord}(\lambda) \end{aligned} \quad (21)$$

両式により、任意の N, M に対して固有値の確率分布を求めることができる。その場合でも、 N, M の値が大きくなると項が増えて手に負えなくなり、数式ソフト（例えば、Mathematica）のお世話になることになるだろう。MIMO の最小構成である $N=M=2$ ($c_2=1$ である) については手計算で容易に分布が得られるので次式で確かめて欲しい。

$$2 \times 2 \rightarrow f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 e^{-\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$f_1^{ord}(\lambda_1) = \int_0^{\lambda_1} f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = (\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 2)e^{-\lambda_1} - 2e^{-2\lambda_1}$$

$$f_2^{ord}(\lambda_2) = \int_{\lambda_2}^{\infty} f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 = 2e^{-2\lambda_2}$$

$$f_0^{unord}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f^{ord}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 \Big|_{\lambda_2=\lambda} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 2\lambda + 2) e^{-\lambda}$$

$N, M \leq 4$ の種々の組み合わせに対する固有値分布とその平均値については[1] (N, M のより広い範囲については[11]の Table 1, 2) にあるので、必要なときに見て欲しい。

3. 2. 2 その他の場合

行列 \mathbf{A} の要素が平均値 0 の複素正規分布であって、要素間が有相関の場合の固有値分布の理論解析は、種々試みられているが[12]-[14]、固有値の確率分布を簡易に与えるような数学モデルはまだ確立されていない。そのため、求めたい確率分布は、クロネッカーモデル (例えば[1]の § 7.3.3) による計算機シミュレーションによって求めるのがよいであろう。

平均値が 0 でない非心の場合のランダム行列は次式で表される。

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{K}{K+1}} \mathbf{A}_D + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \mathbf{A}_S \quad (22)$$

$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

行列 \mathbf{A}_D は要素が全て 1 の $N \times M$ 行列、 \mathbf{A}_S は前節で \mathbf{A} としていた平均値 0 の iid 要素のランダム行列である。また、 K はライスファクタであり、定常成分の電力とランダム成分の平均電力の比で表される。通信の伝搬環境では仲上・ライスフェージング環境を表し、 $K=0$ がレイリーフェージング環境に、 $K=\infty$ の場合が直接波のみ、すなわち、自由空間伝搬に対応している。

このチャンネルの $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ の固有値分布は、平均値 0 の場合のウィシャート分布に対して、**非心ウィシャート分布**と呼ばれる。しかし、非心ウィシャート分布は理論解析が複雑となり、かつ、固有値確率分布の使いやすい式はまだ得られていない (4.3.2 節で述べる近似的な推定は可能である)。

有相関および非心の場合の固有値分布の特性把握には、乱数を用いた計算機シミュレーションが現実的な手段になる。その結果については、一例を[1]に示している。

3. 2. 3 固有値分布のガンマ分布への近似

平均値 0 の無相関ランダム行列よりなるウィシャート行列の固有値分布は、ガンマ分布によって良い精度で近似できることが調べられている [11]。 $N \times M$ のランダム行列における固有値 λ_i の確率分布は次式である。

$$f_i^{ord}(\lambda_i) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^\nu \lambda_i^{\nu-1} \exp(-\beta\lambda_i) \tag{23a}$$

$$f_0^{unord}(\lambda) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^{ord}(\lambda) \tag{23b}$$

$$\nu = (M - i + 1)(N - i + 1), \beta = \nu / \langle \lambda_i \rangle$$

ダイバーシチの理論にはダイバーシチオーダという概念がある。パラメータ ν はそのダイバーシチオーダを与え、 N 素子によるアレーアンテナでのダイバーシチオーダは N である。式 (23a) による第 1 固有値の確率分布ではダイバーシチオーダが MN に、第 2 固有値では $(M-1)(N-1)$ 、というように順次低下してゆくことを示している。図 2 は各固有値が担う仮想通信路(固有パス)のダイバーシチオーダのイメージをまとめている。

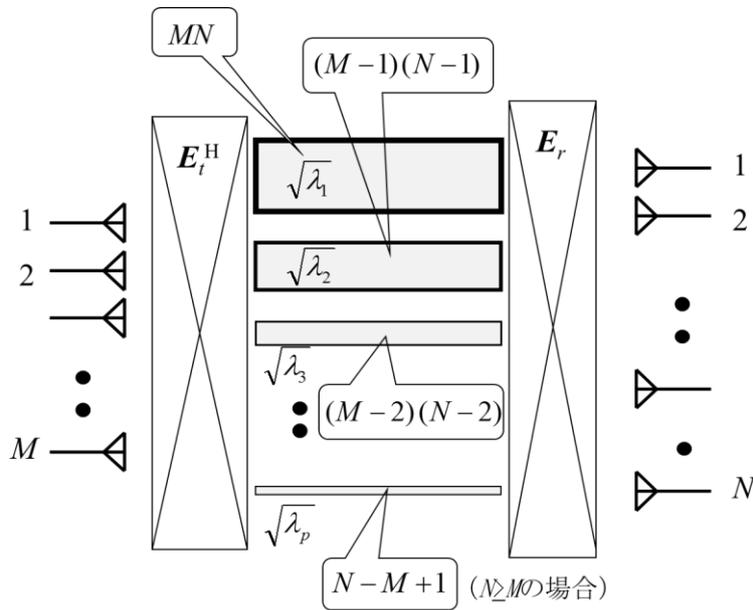


図 2 各固有値が担う固有パスのダイバーシチオーダのイメージ

例えば、 $N=M=2$ のウィシャート行列の第 1 固有値は、前述より

$$\text{ウィシャート分布} : f(\lambda_1) = (\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 2)e^{-\lambda_1} - 2e^{-2\lambda_1}$$

$$\text{ガンマ分布近似: } f(\lambda_1) = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{3.5} \right)^4 \lambda_1^3 \exp\left(-\frac{4}{3.5} \lambda_1\right) = 0.2843 \lambda_1^3 \exp(-1.143 \lambda_1)$$

であり、多数のガンマ分布形の和で構成されるウィシャート分布を、ガンマ分布近似ではより高次の一つのガンマ分布に置き換える構図である。

図3に、 $N=M=4$ のウィシャート行列の4つの順序つき固有値と1つの順序無し固有値について、ウィシャート分布とガンマ分布近似での計算結果を示している（黒線：ウィシャート分布、赤点線：ガンマ分布近似、カーブの形がわかりやすいように横軸は対数スケールにしている）。全ての固有値について、ガンマ分布がよい近似であることがわかる（ λ_4 は理論式と近似式が同じ）。ただ、同図を仔細に見ると、第1固有値の分布には若干のずれが見える。そこで、 $M=N=2, 3, 4, 5$ の第1固有値のみについて分布を比較したのが図4である。行列サイズが大きくなるに従い、 λ_1 に対する近似誤差が目立つようになる。これは、 $N \times M$ MIMO のダイバーシチオーダ MN は固有値全体で担うものであるが、近似では、最大固有値だけでそれを独り占めしており、これが第1固有値の誤差に最も大きく出ている、と筆者は解釈している。

上記の比較より、ガンマ分布近似はあくまで近似であり、 N の大きなところ（特に $N \geq 5$ ）では、最大固有値やそれに近い固有値の分布に関しては誤差に注意しなければいけないが、各固有パスのダイバーシチオーダを直感的に捉えると言う意味において、有用な近似である。

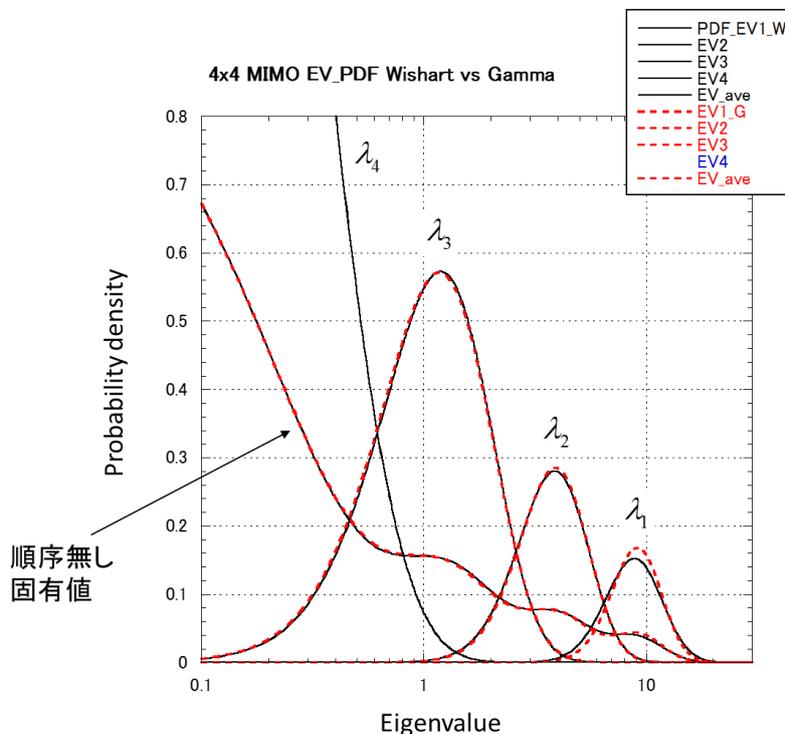


図3 $N=M=4$ のウィシャート行列の固有値分布（黒色実線）とガンマ分布近似（赤色点線）

最大固有値の分布をWishart分布(W)とガンマ分布近似(G)で比較

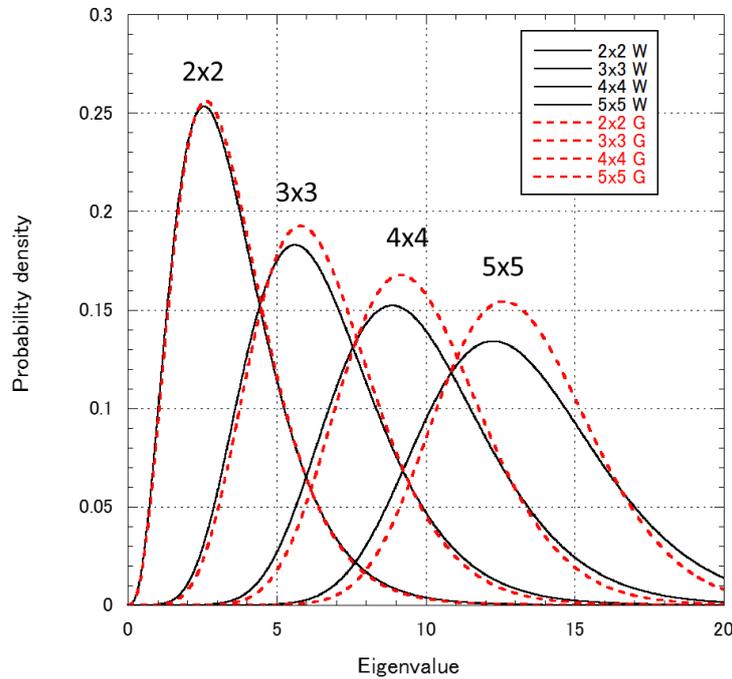


図4 $M=N$ のウィシャート行列の最大固有値 (λ_1) 分布 (黒色実線) とガンマ分布近似 (赤色点線)

4. 大規模ランダム行列の漸近固有値分布

確率分布の理論で中心極限定理がある。分布が同じ多数の変数の和の分布 (あるいは平均値の分布) は、元の変数の分布が何であれ、正規分布に収束するというものである。ランダム行列にも同様に、その行列サイズが十分大きいところでは、その要素の確率分布に関係なく、固有値が一定の分布に近づくことが調べられている。このような分布は漸近固有値分布と呼ばれる。ランダム行列の漸近固有値分布を4. 1節で紹介した後、本レポートの主題である大規模ウィシャート行列の漸近固有値分布 (マルチェンコ・パスツール則) を4. 2節で詳しく調べる。

4. 1 ランダム行列の漸近固有値分布

ランダム行列の分野では有名な3つの基本法則: 円則、ウィグナーの半円則、マルチェンコ・パスツール則がある。この節では、円則と半円則を紹介する。

4. 1. 1 円則 (ランダム正方行列に対して)

正方行列の要素がランダムである場合、固有値は複素数になる。この固有値の分布は、行列サイズ N を十分大きくしてゆくと、一つの形に集約してくる。例えば、標準正規分布 (平均値0、分散1) する乱数で与えた場合、行列サイズ (=固有値の数) の平方根 \sqrt{N} で割った正規化固有値 $\hat{\lambda} (= \lambda / \sqrt{N})$ は複素平面状で半径1の円内に均等に分布する。この性質を円

則と呼ぶ。図5は、 $N=10,000$ として、全部の固有値をプロットしたものである。この性質は元の分布の形に依存しない。実数の一様分布でも、二次元の複素ガウス分布 ($x+jy$ の x, y が平均値 0 の独立な正規分布) でも円則が成り立つ。各自試してみるとよい。

この理論解析には数学の道具立てが必要になり、長い歴史がある。大変面白い性質だが、無線通信の固有値解析で、この「円則」が出てくる場面を筆者は知らない。

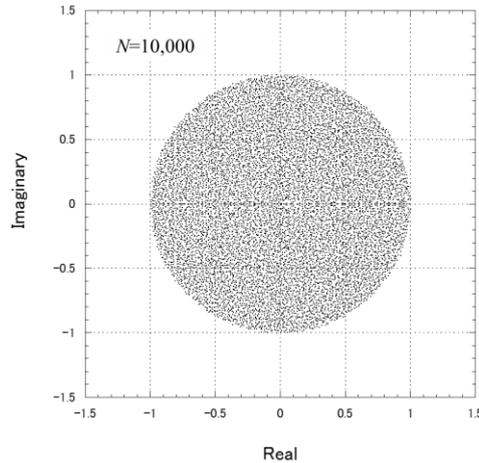


図5 大規模ランダム行列（正方行列）の固有値分布（ $N=10,000$ 、各要素は標準正規分布）

4. 1. 2 ウィグナーの半円則（ランダム実対称行列に対して）

実対称行列の固有値は実数である。行列の要素を標準正規分布とし、 $N=10, 100, 1000, 10000$ の場合の固有値のヒストグラムを図6に示す。図からわかるように、 N を大きくしてゆくと固有値の分布は次式に収束してくる。

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-\hat{\lambda}^2}}{2\pi} & (|\hat{\lambda}| \leq 2) \\ 0 & (|\hat{\lambda}| > 2) \end{cases} \quad (\hat{\lambda} \equiv \lambda / \sqrt{N}) \quad (24)$$

この計算値を $N=10000$ のヒストグラム (図6 (d)) に重ねている ((24)式で $f(0)=1/\pi$ であるが、ヒストグラムの縦軸スケールに合わせると $1/\pi \times 10000 \times 0.05 = 159.2$ になる)。式(24)の右辺の $\sqrt{4-\hat{\lambda}^2}$ が半円の形でありウィグナーの半円則と呼ばれる。この導出は文献[15]の第1章で丁寧に示されているが、数学的手順を踏んで進めてゆく形になるため、フォローするのは結構手ごわい。

これも、行列要素の元の分布の形は問わず、平均値 0、分散 1 の実対称行列であればよい。他の分布 (例えば一様分布) で試してみると良い。「円則」の場合と同様、この「ウィグナーの半円則」も、無線通信の固有値解析で出てくる場面を筆者は知らない。

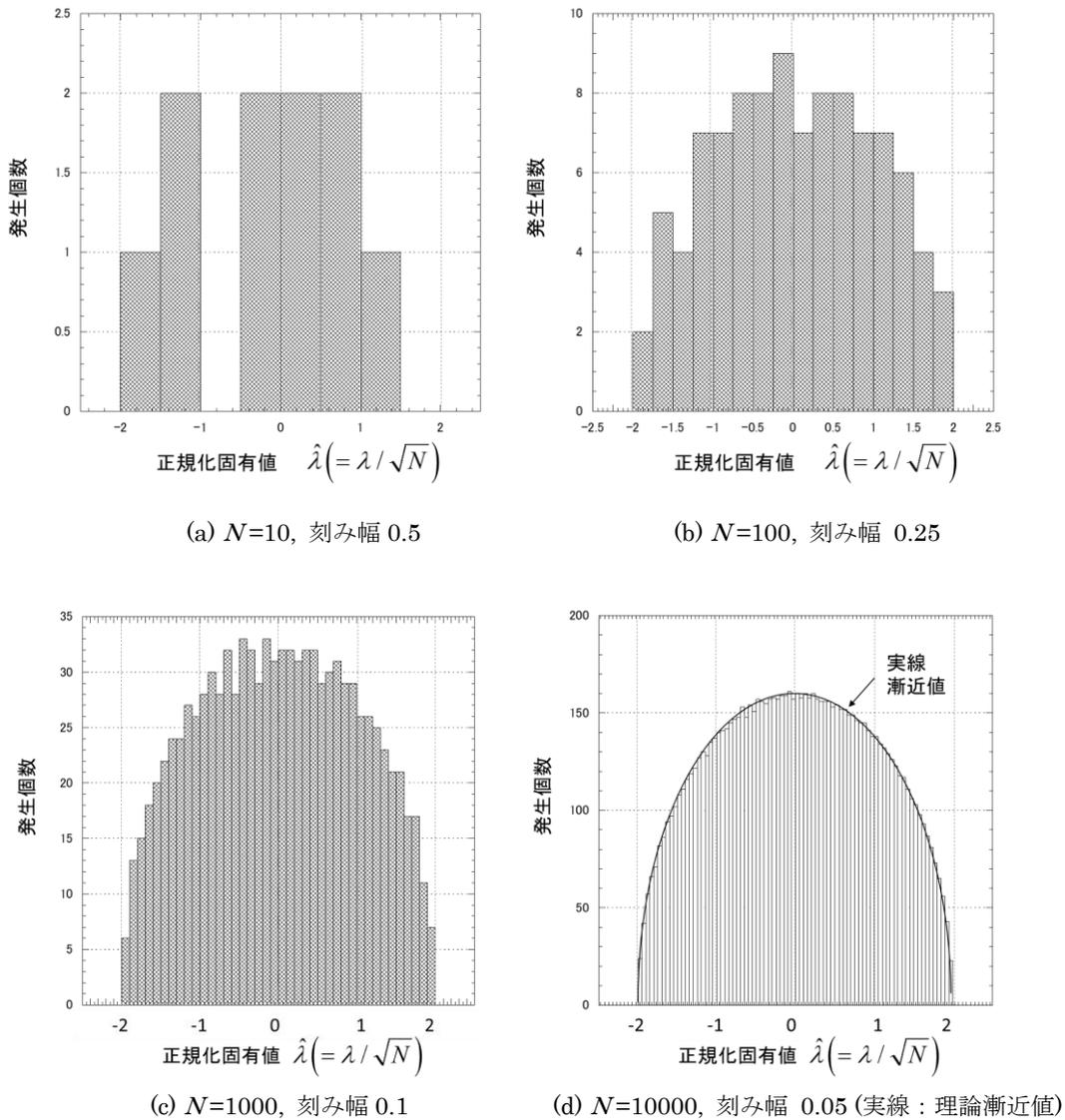


図6 実対称行列の固有値のヒストグラム

4. 2 マルチェンコ・パスツール則 (ウィシャート行列に対して)

3.2 節の(16)式により、ウィシャート行列を示した。元になる $N \times M$ のランダム行列 \mathbf{A} の要素は、実数の正規分布であっても、複素数の2次元正規分布であっても、要素間が無相関の同一分布 (i.i.d.) であればよい。

行列 \mathbf{A} の M と N の比を β とし、 $N \rightarrow \infty$ でのウィシャート行列の順序無正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の漸近固有値分布 $f(\hat{\lambda})$ を考える。

$$\beta \equiv M / N \tag{25a}$$

$$\hat{\lambda} = \lambda / N \tag{25b}$$

(24)式と(25b)式で正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の式が異なるのは、(24)式ではランダム行列 \mathbf{A} の、(25b)

式ではウィンシャート行列 \mathbf{AA}^H の固有値を求めていることによる。順序無し固有値の漸近確率分布 $f(\hat{\lambda})$ は、マルチェンコ・パスツール (Marčenko-Pastur (MP)) 則 と呼ばれ、次式で与えられる。(マルチェンコとパスツールが 1967 年に論文発表したものであるが、この解説は [15], [16] に、その導出は [17] の § 3.2 に。導出そのものは難しいが、得られた結果が極めて簡明であることに我々は喜ぶたい)。

$$f_{MP}(\hat{\lambda}) = (1-\beta)^+ \delta(\hat{\lambda}) + \frac{\sqrt{(\hat{\lambda}-\hat{\lambda}_-)^+ (\hat{\lambda}_+ - \hat{\lambda})^+}}{2\pi\hat{\lambda}} \quad (26)$$

$$\hat{\lambda}_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\beta})^2, \quad (z)^+ \equiv \max(0, z)$$

右辺第 1 項のデルタ関数 δ は、 $\beta < 1$ 、すなわち、 $M < N$ で \mathbf{AA}^H の固有値を求める場合に、値が 0 となる固有値を含むことによるものであるため、以下では、 $\beta \geq 1$ ($M \geq N$) に限定して、右辺第 2 項のみで考える。その時、式 (26) は次式のようにも書ける。

$$f_{MP}(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\beta - (\hat{\lambda} - 1 - \beta)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} & \text{for } (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \hat{\lambda} \leq (1 + \sqrt{\beta})^2 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (27)$$

$\beta = 1$ ($M = N$) の場合には、簡単になって、

$$f_{MP}(\hat{\lambda}; \beta) \Big|_{\beta=1} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{\hat{\lambda}} - 1} & \text{for } 0 \leq \hat{\lambda} \leq 4 \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (28)$$

となる。累積分布関数は次式である [1] (積分解法は「岩波数学公式 I」より)。

$$F_{MP}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sqrt{-\hat{\lambda}^2 + 2(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2} - (1+\beta) \sin^{-1} \left(\frac{1+\beta-\hat{\lambda}}{2\sqrt{\beta}} \right) - |1-\beta| \sin^{-1} \left(\frac{(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2}{2\sqrt{\beta}\hat{\lambda}} \right) + \pi \right\} \quad (29)$$

$N=M$ である $\beta=1$ の場合には、

$$F_{MP}(\hat{\lambda}, \beta) \Big|_{\beta=1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\hat{\lambda}(4-\hat{\lambda})} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (30)$$

となる。

図7は、式(27)で与えられる正規化漸近固有値の確率密度関数を、 β をパラメータとして示している。それぞれ、正規化固有値が限定された範囲に収まることが興味深い ($\beta=1$ では0~4の範囲)。図8は、確認の意味で、 $\beta=4$ について、 $N=2000, M=8000$ の一つの行列 (=多数回の平均値ではない) でのシミュレーション結果である。図は縦軸を度数とするヒストグラムで描いているが、換算して軸を合わせると、図7の $\beta=4$ のカーブとぴったり一致する。

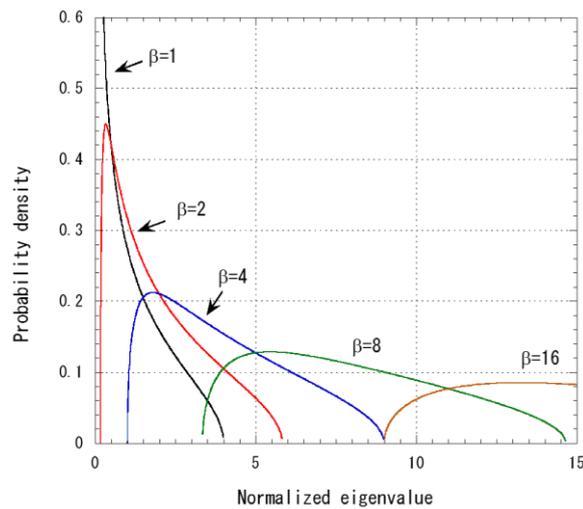


図7 漸近固有値分布 (マルチェンコ・パスツール則)

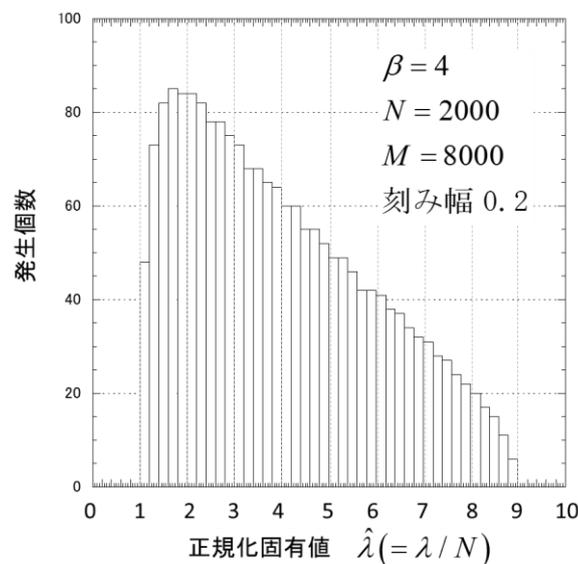


図8 大規模ウィシャート行列の正規化固有値分布の例 (一つの行列での試行値)

累積確率を p とすると、(29)式は、 $p = F(\hat{\lambda})$ の形である。一方、通信路容量解析などにおいては、 p を与えて $\hat{\lambda}$ を求めたい場合があり、 $\hat{\lambda} = F^{-1}(p)$ の形もほしい。しかし、(29)式から、その逆関数を閉形式で表すことは難しいように（あるいは不可能に）思われる。そこで、マルチェンコ・パスツール則の累積分布関数を一旦(29)式により数値計算し、その逆関数をグラフ処理ソフトの回帰曲線作成機能を使って多項式近似で表すのがよいであろう。具体的には、

$$g(p; \beta) \{ \equiv F_{MP}^{-1}(p; \beta) \} \approx \sum_{q=0}^6 b_q p^q \tag{31}$$

である。正規化漸近固有値の存在範囲 $\hat{\lambda}_{\min} \leq \hat{\lambda} \leq \hat{\lambda}_{\max}$ において、6 次の多項式の近似で十分であり、 $\beta=1, 2, 4, 8, 16$ に対して係数 b_q は表 1 で与えられる。

表 1 マルチェンコ・パスツール則に基づく正規化漸近固有値と累積確率の関係を表す多項式近似の各係数（表中の項目 R は厳密式（式(29)）と近似式の値の相関係数）

β	1	2	4	8	16
$\hat{\lambda}_{\min} / \hat{\lambda}_{\max}$	0/4	0.1716/5.828	1/9	3.343/14.66	9/25
b_0	0.04595	0.22119	1.0727	3.4583	9.1797
b_1	-3.1389	0.23316	4.3422	10.146	18.394
b_2	36.149	23.502	12.866	-1.4689	-21.627
b_3	-140.03	-101.8	-76.134	-43.97	-0.05773
b_4	273.65	216.62	185.77	150.49	104.33
b_5	-251.76	-211.37	-194.85	-178.83	-159.75
b_6	88.961	78.271	75.754	74.605	74.243
R	0.99977	0.99986	0.99991	0.99993	0.99994

大規模ウィシャート行列の正規化固有値分布と小規模ウィシャート行列の正規化固有値分布にはその意味合いにおいて本質的な違いがある。小規模行列では、固有値の数は少なく、統計的な意味を持たせるためには、多数回の試行を行ってその分布を見ることになる。一方、大規模行列では、図 8 の例で示したように十分な数の固有値が一つの行列の中に現れ、それ自身が統計的性質を持つ。大規模ウィシャート行列では、その一つの行列の中に、多数の固有値がかなり規則的に分布し、ランダム行列ごとの特性が安定である。一方、小規模行列では、一つの行列に現れる固有値の数が少なく、行列要素の乱数を変える毎に値に大きなばらつきがある。「一つの行列の中に確率分布の全体が規則的に現れる（大規模行列）」のと「乱数を変える毎に確率的にばらついて現れる（小規模行列）」の違いである。

4. 3 順序つき正規化固有値の期待値

4. 3. 1 平均値 0 のランダム行列 (マルチェンコ・パスツール則) の場合

順序統計の理論から以下の性質が得られている[18]。

N 個の標準一様乱数 (0~1 区間) を大きい順に並べて x_i ($i=1, 2, \dots, N$) とする。それぞれの期待値 $\langle x_i \rangle$ は次式である (この導出は、[18]の付録 A.3、あるいは[19]の § 1.2)。

$$\langle x_i \rangle = 1 - \frac{i}{N+1} \quad (32)$$

この期待値は、多数の標本値を大きい順に並べて N 個のグループに分け、それぞれの平均値を求めたものとは異なることが理解できるであろう。なぜならその場合は $1-(i-0.5)/N$ になるからである。

0~1 区間一様分布の累積分布関数を F_u とすると $F_u=x$ であるので、(32)式より $\langle x_i \rangle$ は累積確率 F_u の $1-i/(N+1)$ に対応すると読み替えることができる。一様分布以外の分布形に対しては近似になるが、任意の確率分布に対しても、累積分布同士の同確率値対応を採用するのは合理的である ([1]の図 3. 3による説明)。そこで、マルチェンコ・パスツール則の分布に対しても、一様分布との同確率値対応により次式で定める。

$$\begin{aligned} F_{MP}(\langle \hat{\lambda}_i \rangle; \beta) &\approx p_i, \quad p_i = 1 - \frac{i}{N+1} \\ \rightarrow \langle \hat{\lambda}_i \rangle &\approx F_{MP}^{-1}(p_i; \beta) \approx g(p_i; \beta) \end{aligned} \quad (33)$$

固有値の数 N を 20 とし、 $\beta=4, 8, 16$ に対応する $M=80, 160, 320$ の 3 つのケースについて、計算機シミュレーションで求めた順序つき正規化固有値の平均値と順序の関係を図 9 に●で示している。また、式(33)による計算値を□で示している。近似であることによって、最大及び最小固有値付近で僅かなずれがあるが、式(33)による算定で問題ないと言える。

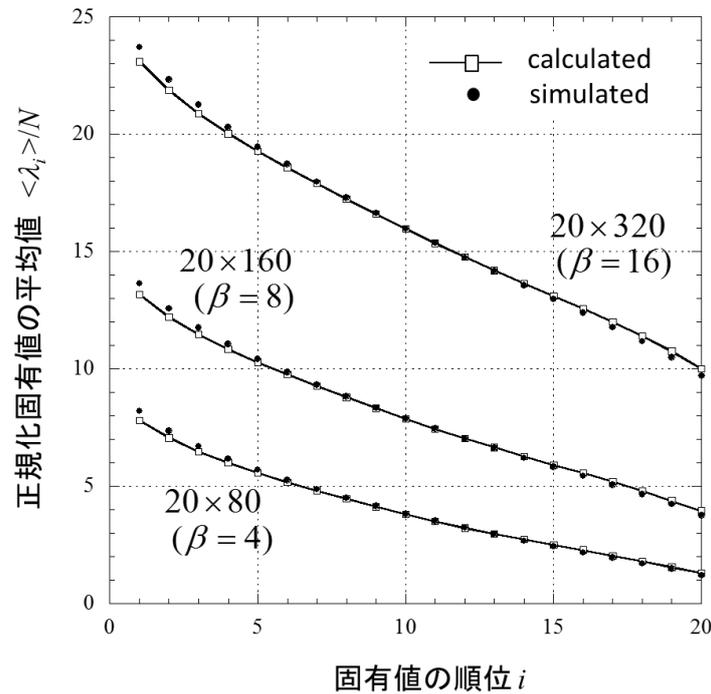


図9 乱数シミュレーションで得た順序付き正規化固有値の平均値 $\langle \lambda_i \rangle$ (●) と順序無し正規化固有値のマルチェンコ・パスツール則累積分布からの計算値 (□)

4. 3. 2 非心ランダム行列の場合

非心ランダム行列は、仲上・ライスフェージング環境に現れ、見通し内の伝搬環境に代表される。3.2.2節で述べたように、仲上・ライスフェージング環境では定常波（直接波）電力と不規則波（散乱波）の平均電力との比 K （ライスファクタ）がパラメータになる。その通信路行列は(22)式で表される。そこでも述べたように、仲上・ライスフェージング環境での漸近固有値分布の理論解析は大変困難かつ複雑である。そこで、 N が大きい場合に期待される近似モデルを示す。

非心ランダム行列よりなるウィシャート行列の固有値 λ_i の期待値を以下の近似式で仮定する。

$$\langle \lambda_i \rangle \approx \begin{cases} \frac{K}{K+1} \lambda_D + \frac{1}{K+1} \langle \lambda_{R,i} \rangle & (i=1) \\ \frac{1}{K+1} \langle \lambda_{R,i} \rangle & (2 \leq i \leq N) \end{cases} \quad (34)$$

ここで λ_D は(22)式の定常成分行列 \mathbf{A}_D の第一固有値、 $\lambda_{R,i}$ は散乱波成分行列 \mathbf{A}_R の*i*番目の固有値であり、 λ_D は MN で、 $\langle \lambda_{R,i} \rangle$ はマルチェンコ・パスツール則を式(33)と同じに適用して、それぞれ次式で与えられる。

$$\lambda_D = \beta N^2 (= MN) \quad (35a)$$

$$\langle \lambda_{R,i} \rangle \approx NF_{MP}^{-1}(p_i; \beta) \quad p_i = 1 - \frac{i}{N+1} \quad (35b)$$

計算機シミュレーションにより、この近似の精度が十分であることが[20]により確かめられている。

4. 3. 3 有相関ランダム行列の場合

有相関のランダム行列はクロネッカーモデルを用いて以下のように表される。

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{\Pi}_r} \mathbf{A}_S \sqrt{\mathbf{\Pi}_t}^H \quad (36)$$

$$\mathbf{\Pi}_t = \frac{1}{N} \langle \mathbf{A}^H \mathbf{A} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{t,12} & \cdots & \rho_{t,1M} \\ \rho_{t,12}^* & 1 & \cdots & \rho_{t,2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{t,1M}^* & \rho_{t,2M}^* & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Pi}_r = \frac{1}{M} \langle \mathbf{A} \mathbf{A}^H \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{r,12} & \cdots & \rho_{r,1M} \\ \rho_{r,12}^* & 1 & \cdots & \rho_{r,2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{r,1M}^* & \rho_{r,2M}^* & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、行列 \mathbf{A}_S は要素の分布が iid のランダム行列、 $\mathbf{\Pi}_t, \mathbf{\Pi}_r$ は入力側および出力側の相関行列で、 $\rho_{t,mm'}$ は送信側ポート m と m' の相関係数、 $\rho_{r,nn'}$ は受信側ポート n と n' の相関係数である。

無線通信においては、図 10 のような通信路で相関が表れる。図で、左側を送信局のアレーとする。受信側が散乱帯で囲まれたエリアの中にありそのエリアを囲む角度を θ_p とする。アレー全素子で作るアンテナのビーム幅 θ_a は、大規模アレーでは狭い値に成り、 $\theta_a \ll \theta_p$ と想定できる。一方、隣接する 2 素子で作るサブアレーのビーム幅 θ_b はかなり広くなり、 $\theta_b > \theta_a$ も有りうる。このような状態では、入力ポート間（特に隣接ポート間付近）で相関が大きくなり、 $\rho_{t,mm'}$ ($m \neq m'$) がそれぞれの相関値を持つ。（移動通信伝搬環境に対する具体的な相関係数の定め方については[1]の(5.35)式など）。

大規模アレーにおいて、有相関時の固有値の分布を計算機シミュレーションにより調べ、その結果が[20]にまとめられている。有相関時の性質は以下のとおりである。

- 1) 全固有値の総和一定の下、最大固有値と最小固有値の開きが、相関が大きくなるほど大きくなる。
- 2) 非心ランダム行列（すなわち、仲上・ライスフェージング環境）の場合は、第一固有値に含まれる定常成分の固有値は λ_0 は相関の有無によらず一定である。
- 3) 非心ランダム行列の不規則成分に関しては、大きさが $1/(K+1)$ になることを除いて、平均値が0の上記1)と同様である。

図1 1は非心ランダム行列における上述の固有値分布の傾向を、無相関・有相関の場合についてまとめたイメージ図である。

スペースダイバーシチや小規模 MIMO では、相関が大きくなるほど通信特性（BER や通信路容量）が劣化するため、相関を小さくする対策が重要になっていた。しかしながら、大規模 MIMO では、数多くできる固有パスから、固有値の上位のパスだけを選んで並列伝送したい場合には、むしろ有相関の方が、より利得の大きい固有パスを集めることができるので、通信路容量が上がることになる[20]。このように有相関が有利に働くなら、アレー素子間隔を故意に狭くして相関値を上げ、結果としてアレーアンテナを小型にすることができる。

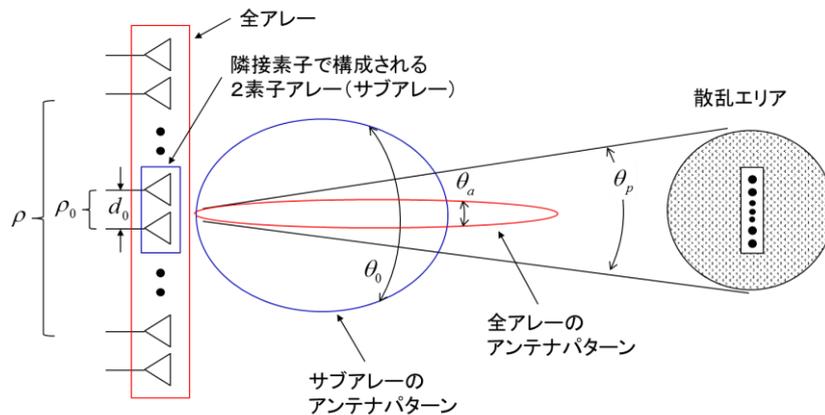


図1 0 ランダム行列が有相関になる通信環境の例

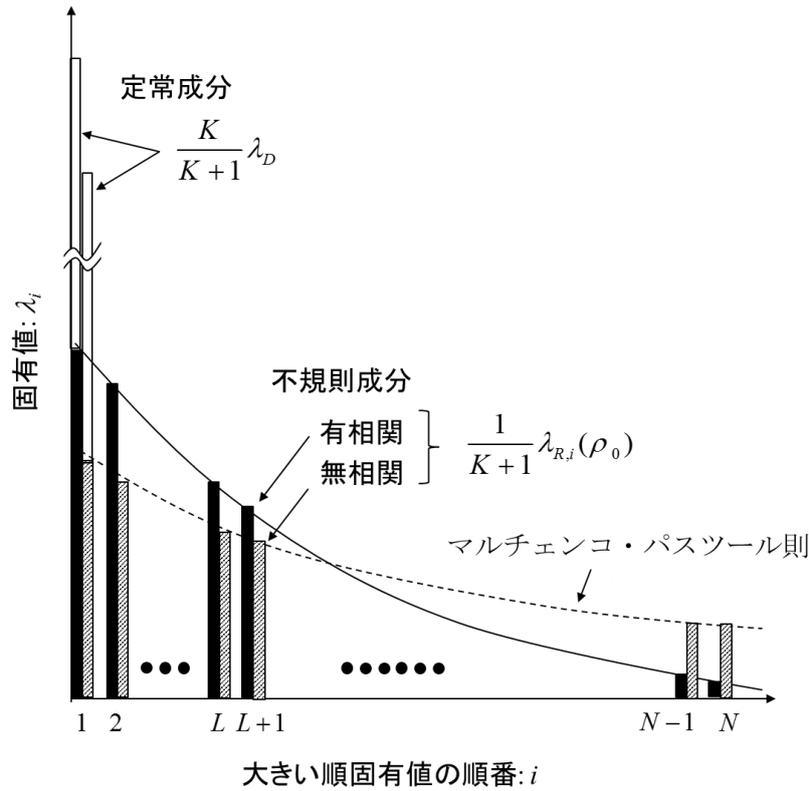


図 1 1 非心ランダム行列の固有値分布の相関の有無に対する近似的構造

参考文献

- [1] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.
- [2]-[7] 唐沢好男, 技術レポート (私報) : YK-005, 006, 014, 016, 033, 049. これらのレポートは以下のサイトのリストから <http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/report.htm>
- [8] A. T. James, "Distribution of matrix variables and latent roots derived from normal samples," *Ann. Math. Statist.*, vol. 35, pp. 475-501, 1964.
- [9] S. S. Wilks, (田中英之, 岩本誠一 訳), 数理統計学 2, 東京図書, 1972. (§18.6)
- [10] M. L. Mehta, *Random Matrices (Third Ed.)*, Elsevier Academic Press, 2004.
- [11] T. Taniguchi, S. Sha, and Y. Karasawa, "Analysis and approximation of statistical distribution of eigenvalues in i.i.d. MIMO channels under Rayleigh fading," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E91-A, no. 10, pp.2808-2817, 2008.
- [12] M. Chiani, M. Z. Win, and A. Zenella, "On the capacity of spatially correlated MIMO Rayleigh-fading channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2363-2371, 2003.
- [13] S. H. Simon, A. L. Moustakas, and L. Marinelli, "Capacity and character expansions: Moment-generating function and other exact results for MIMO correlated channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 12, pp. 5336-5351, 2006.
- [14] V. V. Veeravalli, Y. Liang, and A. M. Sayeed, "Corelated MIMO wireless channels: Capacity, optimal signaling, and asymptotics," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 6, pp. 2058-2072, 2005.

- [15] 渡辺澄夫他, ランダム行列の数理と科学, 森北出版, 2014.
- [16] A. M. Tulino and S. Verdu, *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, now Publishers Inc., 2004.
- [17] R. Couillet and M. Debbah, *Random Matrix Methods for Wireless Communications*, Cambridge Univ. Press, 2011.
- [18] 高橋倫也, 志村隆彰, 極値統計学, IMSシリーズ: 進化する統計数理 5, 近代科学社, 2016.
- [19] 唐沢好男, “極値統計学へのいざない,” 技術レポート (私報) : YK-020, 2-19.02.
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/YK-020_KyokuchiToukei.pdf
- [20] Y. Karasawa, "Channel capacity of massive MIMO with selected multi-stream transmission in spatially correlated fading environments, *IEEE Trans. Vehicul. Technol.*, vol. 69, no. 5, pp. 5320-5330, 2020.