

## 電磁気学の奥深さ（13）：電磁気学のパラドックス「静電磁界において $E \times H$ は電力の流れを生むか？」を考える【差替え版】

唐沢好男

本レポートは、同タイトルの技術レポート（YK-051）の差替え版である。筆者が表題の問題（パラドックス）に興味を持った経緯、問題点の整理、筆者なりの推論とその結論をまとめている。その結論では、静電磁界であっても、単位面積あたり  $\eta|E \times H|$  の電力移動があること（ $\eta$  は本レポートで導入した係数）を示す。この推論が本件に関心を持つ皆さんの更なる議論への入り口になれば幸いである。

### 1. 電磁気学のパラドックス

電磁気学（マクスウェルの方程式）は、4つの法則を基にして、ガラス細工のようにデリケートにかつ巧妙に組み立てられてはいるものの、その全体像は綻びのない確固たる理論になっている。しかし、現象の部分部分を見れば不可解な結論を呼び起こしそうなパラドックスがある。「物理のパラドックスは理解の迷いに過ぎない」と切り捨ててしまえるファイマンと違って、我々にはその迷いの中からもなかなか脱出できない現実がある。

筆者が研究者としてまだ駆け出しのころの1984年、信学会の会誌6月号に「電磁波工学におけるパラドックス～その思い違いを探る～」と題する解説記事が安達三郎先生によりまとめられている[1]。その中では、6つの項目が質問の形で提起され、それぞれについて解答が述べられているが、その中のひとつに「静電界の中の磁石はポインティング電力を発生するか」がある。これに対する解答は、「この問題に解答を与えるのは簡単ではないように思う」で始まり、三つの考え方（発生する・しない両面からの）がまとめられている。（問題提起は後藤尚久先生、解答担当は徳丸仁先生）

問題は以下である。

【問題（要約）】図1に示すように同軸線路に直流電圧  $V$ 、電流  $I$  を印加すると、内部空間中のポインティングベクトル  $E \times H$  の断面積での積分は伝送電力である  $VI$  に等しくなり、静電磁界中でも、ポインティングベクトルが電力の流れを示している。それでは、図2に示すように正電荷を帯びた磁石が有るとすると、電荷による静電界と磁石による静磁界によって作られるポインティングベクトルが図に示すようになり、磁石の周りをエネルギーが循環することになる。本当か？（この問題を最初に提起したのはヘルツ(1890)）

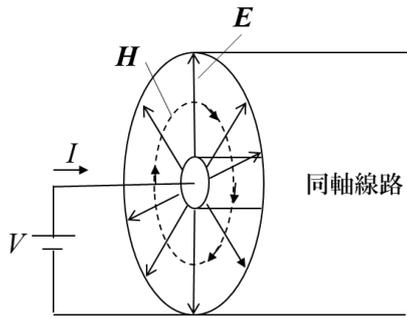


図1 同軸線路による直流送電

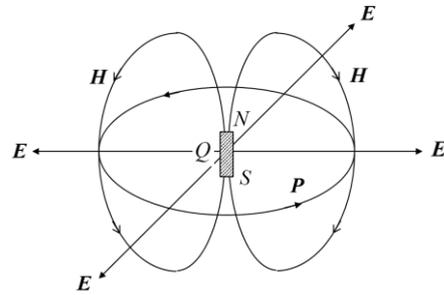


図2 静電界と磁石によるポインティング電力の還流

端的に言うと、図3のように静電界と静磁界が直交して存在するとき、ベクトル  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  はエネルギーの流れを生むかである。ここで、考えられる答えは、組み合わせ的に

- ① エネルギーの流れを生む
- ② エネルギーの流れはできない
- ③ できる場合とできない場合がある

②は図1のケースで存在が証明されているので×である。③の場合であれば、できる・できないの違いは、何の差でそうなるかが知りたいところになる。

筆者が調べた電磁気学の専門書では、[2], [3]は③、[4], [5]は①と読める書き方になっている。[2]では、「単に  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  なるベクトルが形成されるからといって、エネルギーの流れがあるわけではない。例えば、真空中に静電場と静磁場がかさね合わさって存在するとき、・・・（略：流れは無いと言う説明）」と記されている。一方、[4]では「今日でも、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ （本では  $(1/\mu_0) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ）が必ずしもエネルギー流速密度を表さないと述べている教科書が多いが、それは誤りである。運動量密度  $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  にそのような任意性はなく、相対論の要請であるプランクの関係式のため、エネルギー流速密度にも任意性はない」と記している。さらに、[5]のファインマンの物理学 IV (§ 6.5)では、図2の問題そのものに言及がある。そこでは、「これ（＝エネルギーの還流があるということ）はばかげた話である」で始まっているが、普通の直感は正しくない（＝還流を認める）という論調であり、①に軍配を上げている。こういう両論があり、[1]では「この問題に解答を与えるのは簡単ではないように思う」のまとめになっているのだと推察される。

その後、この問題はどうか整理されているのだろうか（あるいはどうか決着が付けられているのであろうか）。インターネット上には、物理学者 Prof. Eric Load によるオープンフォーラム “What is the significance of the Poynting vector in a static electromagnetic field?” のスレッドが2014年に立ち上げられ、多くの識者による議論が繰り広げられている[6]。一方、我が国でも、[7]でこの問題が取り上げられており、そのまえがきと参考文献で、ポインティングベクトル問題への取り組みの歴史も窺い知ることができる。[6]については、筆者がそれを見る限り、議論は続けど、脱線したり、相手の攻撃に熱量が上がったりで、収束してゆくようには見えない（Eric氏も途中で失望してさじを投げるような言動が時々挟まっている）。[7]は高度に専門的で、筆者には難しすぎて内容の理解には至っていないが、「ポインティングベクトルに関し静電磁界と動電磁界を区別

する必要はない」と言う結論であり、①である（動電磁界環境でのフーリエ解析理論から $\omega=0$ の静電磁界にもそのまま接続できるという論理）。

筆者にはこれらを裁くほどの力量は無いが、以下の直感的な推論を行い、答えは①ではないかとの確信を強めている。

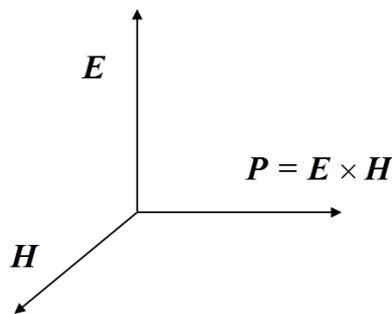


図3 静電磁界中のポインティングベクトル  $\mathbf{P}$  はエネルギーの流れを表しているか？

## 2. ポインティング電力から想定されるエネルギーの移動速度

動電磁界、すなわち、電磁波動では、ポインティングベクトルがエネルギー流速密度を表すことに議論の余地はないと思うので、図3で表される静電磁界に限定する。ここでは、議論を簡明にするため、自由空間に一樣な静電界  $\mathbf{E}$  と静磁界  $\mathbf{H}$  が直交して存在し、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{H}$  の大きさは任意に設定できることとする。それがどのようにしてできたのかという原因（＝生成構造）には触れない。本稿では、図4に示すように、電界  $\mathbf{E}$  を  $y$  軸正方向に向け、磁界  $\mathbf{H}$  を電界と直交する  $z$  軸方向に置く。以下、電界の大きさ  $E$ ,  $H$  はスカラー値とし、 $E$  は正の値に、 $H$  は正負の値をもつとする。単位面積当たりポインティング電力の通過が  $x$  軸方向にあると仮定して、エネルギーの移動量と移動速度を見てみたい。このポインティング電力を

$$\mathbf{P} = \eta \mathbf{E} \mathbf{H} \tag{1}$$

と仮に置いてみよう。教科書で扱われるポインティング電力  $\mathbf{E} \mathbf{H}$  に係数  $\eta$  をかけているのは、3節以降の議論に関わることであって、本節では、通常のポインティング電力を与える  $\eta=1$  で考えてみたい。なお、 $H$  が負の値のときは、 $\mathbf{P}$  も負の値になるが、これは電力の動く方向が  $x$  軸の負方向と見てほしい（電力  $|\mathbf{P}|$  がポインティングベクトル  $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  の方向に動いているということと同じ）。

この空間における単位体積当たりの電磁エネルギー（エネルギー密度）は次式である。

$$u_{EM} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \tag{2}$$

このエネルギーが単位面積を通過するとして、その流出速度  $v_p$  とする。単位体積あたり  $u_{EM}$  のエネルギーが速度  $v_p$  で移動すると、単位面積当たり通過する電力（＝1秒当たりのエネルギー）は  $u_{EM} v_p$  であり、これが、ポインティング電力  $\mathbf{P}$  に等しいとすると、速度  $v_p$  は次式となる。

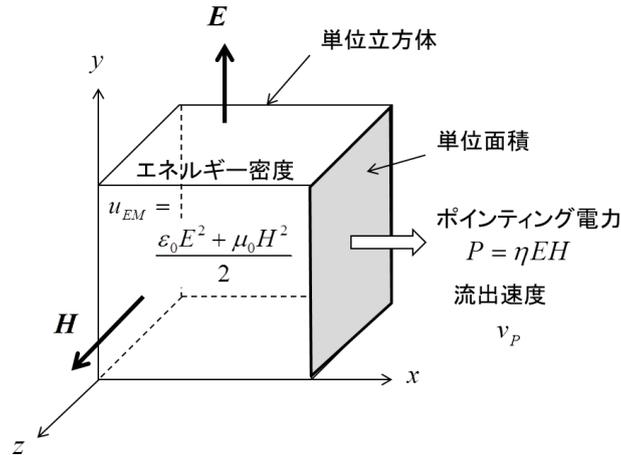


図4 電界・磁界・エネルギー密度・ポインティング電力・流出速度の説明図

$$v_P = \frac{P}{u_{EM}} = \frac{2\eta EH}{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2} = \frac{2\eta Z}{\epsilon_0 Z^2 + \mu_0}, \quad Z \equiv \frac{E}{H} \quad (3)$$

ここで、 $E$ と $H$ の比で定義する $Z$ は、インピーダンス[Ω]の単位を持つ。

速度 $v_P$ は、 $Z=0$  ( $E=0$ )と $Z=\infty$  ( $H=0$ )の両極限で0となり、 $Z$ の中間に極大値を持つ。その極大値 $v_{P,max}$ は、 $\eta=1$ であると仮定すれば、次式により光の速度 $c$ になる。

$$\frac{dV_P}{dZ} = 0 \quad (\eta=1) \rightarrow Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \equiv Z_0 (\approx 377 \Omega) \quad (4a)$$

$$v_{P,max} = \frac{2Z_0}{\epsilon_0 Z_0^2 + \mu_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (4b)$$

上式は、 $\eta=1$ という条件のもとではあるが、エネルギーの移動が光の速度を超えないという相対論の要請を満たしており、ここまでの推論に破綻は起きていない。また、電磁波動での基本的な性質 ( $Z=Z_0, v_P=c$ )とも符合している。では、これが正しいのであろうか？

### 3. 電磁環境全体で見てみよう

ここでは、次の基本的な考え方を採用したい。

- ① 自由空間においては電磁界のふるまい（電磁現象）は電界と磁界によってのみ決まる
- ② 電界と磁界がそれぞれどのような仕組みで生成されたかということ（原因）を問わない

図4のように、直交する電界と磁界を任意の大きさとして考えてきたが、そのような環境はどのようにしてできているのであろうか。その一つの例は、図5に示すような無限大の平面上に電荷が均一に分布し、かつ、それが一定速度 $v_e$ で $x$ 軸方向に動いている環境である。ただし、速

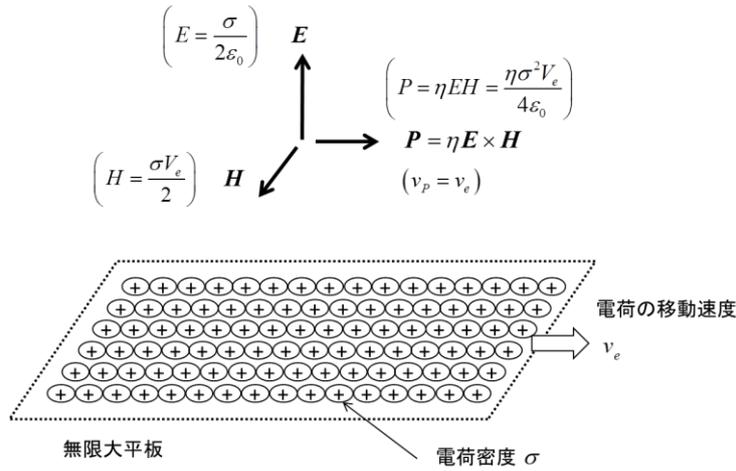


図5 任意の直交静電磁界（図4の環境；ただし、 $|E/H| \geq Z_0$ ）を作り出す環境の一例

度  $v_e$  の調整によって生み出される電磁界は  $|Z| \geq Z_0$  の範囲である。電荷密度を  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] とすると、電界と磁界、及びその比を与えるインピーダンス  $Z$  は以下のように表される。

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{5a}$$

$$H = \frac{\sigma v_e}{2} \tag{5b}$$

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{1}{\epsilon_0 v_e}, \quad |Z| \geq Z_0 \rightarrow v_e = \frac{1}{\epsilon_0 Z} \tag{5c}$$

係数  $\eta$  を残したままでポインティング電力を求めると

$$P = \eta E H = \frac{\eta \sigma^2 v_e}{4\epsilon_0} \tag{6}$$

(3)式で求めたポインティング電力の移動速度  $v_p$  は次式となる。

$$v_p = \frac{2\eta Z}{\epsilon_0 Z^2 + \mu_0} = \frac{2\eta v_e}{1 + \left(\frac{v_e}{c}\right)^2} \quad (\text{ただし、}|v_e| \leq c) \tag{10}$$

図5の環境において、電磁エネルギーは電磁界の原因となる電荷の動き  $v_e$  に同期して動いていると考えるのが自然ではないだろうか。 $v_e = 0$  であれば、エネルギーの移動はない。この考え方を取り入れると

③ エネルギーの移動速度  $v_p$  は電荷の移動速度  $v_e$  に等しい

これより、

$$v_p = v_e \rightarrow \eta = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{v_e}{c} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z_0}{Z} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

ここまでの議論は以下のように整理される。

$|Z| \geq Z_0$  の環境における電磁界の基本式

$$(\epsilon_0 Z^2 + \mu_0) v_p - 2\eta Z = 0 \quad (12a)$$

$$v_p = \frac{1}{\epsilon_0 Z} \leq c \quad (|Z| \geq Z_0) \quad (12b)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z_0}{Z} \right)^2 \right\} \quad (12c)$$

上記によって、以下のような推論ができる

- ・電界  $E$  と磁界  $H$  が有れば  $E \times H$  に比例するエネルギーの流れが  $E \times H$  方向に生まれている。それは、界が静的であるか動的であるかとか、どのような構造で生成されたかを問わない。
- ・ポインティング電力を定める比例係数  $\eta$  はインピーダンス  $Z$  の関数で与えられ、 $|Z|=Z_0$  のとき  $\eta=1$  である。自由空間中の波動や導線に流れる電流の周囲にできる電磁界 (=電磁気学で通常に扱われる電磁界) では  $\eta=1$  であり、(12)式はこれを含んでいる。

#### 4. 異なる慣性系に対して電磁界の共変性が満たされるか

物理法則は、定速直線移動する異なる慣性系の中で同じように成立しなければならない。この性質は共変性と言われ、相対性理論からの要請でもある。図6に示す静止する座標系  $K$  と  $x$  軸方向に一定速度  $V$  で移動する座標系  $K'$  の二つの慣性系を考える。3節で述べたことは静止系  $K$  での現象であったとする。この現象を移動系  $K'$  で見たとき、同様に基本式が成立するかである。

$K$  系の電界  $E$ 、磁界  $H$  を  $K'$  系でみると、その系での電磁界  $E'$ 、 $H'$  はローレンツ変換により次式になる (ローレンツ変換の詳細は[2], [3]など)。

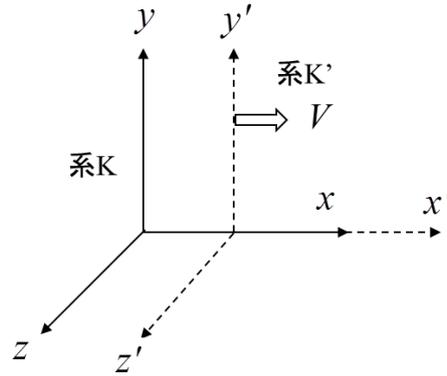


図6 慣性座標系（静止系 K と移動系 K'）

$$E' = \gamma(E - \mu_0 V H) \quad \left( \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \text{ (ローレンツ因子)} \right) \quad (13a)$$

$$H' = \gamma \left( -\frac{V}{\mu_0 c^2} E + H \right) = \gamma(-\epsilon_0 V E + H) \quad (13b)$$

$$Z' = \frac{Z - \mu_0 V}{-\epsilon_0 V Z + 1} \quad (13c)$$

K系において速度  $v_p$  であるとき、速度のローレンツ変換によって、K'系での速度  $v_p'$  は次式になる。

$$v_p' = \frac{v_p - V}{1 - \frac{v_p V}{c^2}} = \frac{1 - \epsilon_0 Z V}{\epsilon_0 (Z - \mu_0 V)} = \frac{1}{\epsilon_0 Z'} \quad (|Z'| \geq Z_0) \quad (14a)$$

(12a)式に相当する K'系での基本式は

$$\left( \epsilon_0 Z'^2 + \mu_0 \right) v_p' - 2\eta' Z' = 0 \quad (14b)$$

であるので、(14a), (14b)式より、

$$\eta' = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z_0}{Z'} \right)^2 \right\} \quad (14c)$$

となる。(12)式を  $Z \rightarrow Z'$  と置き換えた形と(14)式は同じ形であり、共変性が成り立っている。

ダメ押しの動作確認として、 $V=v_e$  としてみよう。

$$V = v_e = \frac{1}{\epsilon_0 Z} \quad (15)$$

この場合、電界  $E'$ 、磁界  $H'$ は次式である。

$$E' = \gamma(E - \mu_0 v_e H) = \gamma \left\{ 1 - \left( \frac{Z_0}{Z} \right)^2 \right\} E \quad (16a)$$

$$H' = \gamma(-\epsilon_0 v_e E + H) = 0 \quad (16b)$$

当然ながら、 $V=v_e$ なので、 $K'$ 系では電荷の動き  $v_e'$  は止まって見え、故に、磁界の発生は無く、 $v_p' = 0$  となることが確認できた。

### 5. $|Z| \leq Z_0$ の場合

3節での推論では、図5で考えており、 $|Z| \geq Z_0$ に対する説明になっている。 $|Z| \leq Z_0$ の場合には、磁界が強い環境を設定しなければいけないので、例えば、 $y$ 軸方向に中心軸が向く無限長直線ソレノイド（径の大きさも十分大きい）の中にできる磁界中を  $x$ 軸方向に速度  $V$  で動く観測者を考えれば、 $|Z| \leq Z_0$ の任意の電磁界が実現できる。要は静止する  $K$ 系と速度  $V$  で動く  $K'$ の関係を考えるのである。具体的な導出の説明を省略し結果のみを示すと、(12)式に対応するものとして次式になる。（他に、図5の正電荷シートを、同密度の正電荷と負電荷のシートを二枚重ねにし、正電荷シートのみを  $x$ 軸方向に動かす設定でも同じ式になる）

$|Z| \leq Z_0$  の環境における電磁界の基本式

$$(\epsilon_0 Z^2 + \mu_0) v_p - 2\eta Z = 0 \quad ((12a)式と同形) \quad (17a)$$

$$v_p = \frac{Z}{\mu_0} \quad (|Z| \leq Z_0) \quad (17b)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 \right\} \quad (17c)$$

### 6. まとめ

- ①自由空間においては電磁界のふるまい（電磁現象）は電界と磁界によってのみ決まる
- ②電界と磁界がそれぞれどのような仕組で生成されたかということ（原因）を問わない

を前提とする推論の結果、 $Z=E/H$ 、 $Z_0$ を真空中の固有インピーダンスとする以下の基本式を得た。

$$(\varepsilon_0 Z^2 + \mu_0) v_p - 2\eta Z = 0$$

$$v_p = \begin{cases} \frac{Z}{\mu_0} & (|Z| \leq Z_0) \\ \frac{1}{\varepsilon_0 Z} & (|Z| \geq Z_0) \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z}{Z_0} \right)^2 \right\} & (|Z| \leq Z_0) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{Z_0}{Z} \right)^2 \right\} & (|Z| \geq Z_0) \end{cases}$$

自由空間での動電磁界（電磁波動）では、マクスウェルの方程式からの要請により  $v_p=c$ 、 $\eta=1$ 、すなわち、 $Z=Z_0$  以外の解をもてないが、静電磁界ではこの制約が無く任意の  $Z$  の値を持つ。それらのすべての場合について上式は成立する。また、この式は、異なる慣性系で成立する共変性を有する（＝相対論の要請を満たしている）。

上記推論が正しいのであれば、電力の移動速度は  $v_p$ 、単位面積を通過するポインティング電力は  $\eta EH$  である。このことより、図2のケースでのエネルギーの還流はあるかの問いには、「還流はある」が答えになる。

この結果に不思議な感覚（直感に反する）を持つと思う。図3のような環境において、エネルギーが勝手に左から右に動いていってしまったら、動いた先にエネルギーが堆積されてしまうのでは、と言った心配もある。でも、例えば、図5の構成において、永遠に無限ならば流れも持続し堆積が起こらないし、そうでなければ、電流連続の法則から右に行った電流は無限遠の先でやがては左に帰ってループを作るのであろうから、その系全体で見ればエネルギー保存則が満たされているということになる。動いているかいないかの違いだけであってエネルギーそのものは存在している中での出来事なので、エネルギー保存則を心配する必要は無いのである。図2の問題に対するファインマンの感覚では、「“静”磁石と呼んでいるものは実は還流している電流に他ならない。エネルギーの還流が外部にあってもそれほど不思議ではない[5]」らしい。論理に矛盾はないと言っても、この問題はいつまでもパラドックスとして残ると思う。それはこの現象を実験によって確かめることが難しいと思うからである（確かめる実験があるのかも分からない）。

なお、本稿での解析では電界  $E$  と磁界  $H$  が直交する場合を扱っている。直交しない場合のポインティングベクトル  $E \times H$  の定式化には、さらにもう一工夫（＝直交モード分解）が必要になると思う。

最後に、本内容について有益な議論をしていただいた電気通信大学安藤芳晃博士に感謝する。

参考文献

- [1] 安達三郎, “電磁波工学におけるパラドックス：その思い違いを探る,” 信学誌, vol. 67, no. 6, pp. 657-662, 1984.
- [2] 砂川重信, *理論電磁気学* (第3版), 紀伊国屋書店, 1999.
- [3] 宇野亨, 白井宏, *電磁気学*, コロナ社, 2010.
- [4] 太田浩一, *電磁気学の基礎 II*, 東京大学出版会, 2012.
- [5] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ: (戸田盛和 訳), *ファインマン物理学 IV ; 電磁波と物性* (増補版), 岩波書店, 2002.
- [6] Eric Load, Open forum, “What is the significance of the Poynting vector in a static electromagnetic field?”, [https://www.researchgate.net/post/What\\_is\\_the\\_significance\\_of\\_the\\_Poynting\\_vector\\_in\\_a\\_static\\_electromagnetic\\_field](https://www.researchgate.net/post/What_is_the_significance_of_the_Poynting_vector_in_a_static_electromagnetic_field)
- [7] 中島将光, “電磁現象の新たな基本概念 (その2) ; ポインティングベクトルの解明とパラドックスの解消,” 電気学会電磁界理論研究会資料, EMT-91, no. 57-75, pp. 101-110, 1991.10.