Technical Report YK-058
March 22, 2021
Y. Karasawa

電磁気学の奥深さ（１４）: ローレンツ力と相対論

電磁気学は４つの法則を連立方程式にしたマクスウェルの方程式よりなる。法則は、電荷に働く力（電気力 ; クーロン力）や電流に働く力（磁気力 ; アンペアの力）から生まれており、電気と磁気の力学に関する理論である。しかしながら、現在、電磁気学教科書に出てくる４つの方程式は電界と磁界の関係、すなわち場（フィールド）の関係を表すものになっていて、力の作用（＝電磁力学）が陽には見えてこない。この力学を担う方程式が、ローレンツ力と呼ばれる式である。この式もマクスウェルの方程式同様、慣性系に対して不変である。本資料は、ローレンツ力が持つ不思議な性質をまとめている。一見、パラドックスに思えるローレンツ力の力学問題も相対性理論によって、辻褄が合う説明ができる。

１．ローレンツ力

電界 $\boldsymbol{E}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中に速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている電荷 q がある。この電荷に働く力 $\boldsymbol{F}$ は次式で表される。

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{q\boldsymbol{E}}_{\text{（電気力）}} + \underbrace{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}_{\text{（磁気力）}} \tag{1}$$

上式の右辺第１項が電気力（クーロン力）、第２項が磁気力（アンペアの力）であり、合わせた力は**ローレンツ力**と呼ばれる。(1)式はマクスウェルの方程式と同列に扱われる式であるので、マクスウェルの方程式がローレンツ変換と言う座標変換に対して不変であったと同様に、ローレンツ変換に対して不変である。すなわち、等速直線運動をするいかなる座標系（＝慣性系）に対しても(1)式は成立する[1]。ここでは、(1)式が慣性形に対して不変であると言うことを導くことが目的ではない。慣性系に対して不変であると言うことを受け入れれば、一見パラドックスと思われることも全て辻褄が合うように説明できるということを、簡単な二つの例（ケース１、ケース２）を用いて示したい。

ここでは、図１の座標系に示すように、静止座標系 K と、速度 v で x 軸方向に動く慣性系 K’で考える。K 系において電界の向きを y 軸正方向にとり、ケース１では磁束密度を z 軸の正方向に、ケース２では負方向にとる。いずれも、二つの要因（電界と磁束密度）による力の向きは y 軸方向ではあるが、ケース１は逆向き、ケース２は同じ向きになる。

ケース１（K 系）： $F_y = qE_y - qvB_z$ (2a)

ケース２（K 系）： $F_y = qE_y + qvB_z$ (2b)

ケース１の特別な場合として、電気力と磁気力が等しい大きさであったとする。この場合は、釣り合いが取れていて、F_y=0 である。これを電荷と一緒に動いている系（K’系）で見

るとどうであろうか。K’系では電荷の速度は 0 なので、磁気力は無く電気力のみになる。K 系でバランスがとれているのなら、すなわち、F_y=0 であるのなら、K’系でもバランスがとれていなければならない、すなわち $F_y'=qE_y'=0$ である。本当に電界は消えてしまったのだろうか？３節では、そういうことを調べてみたい。

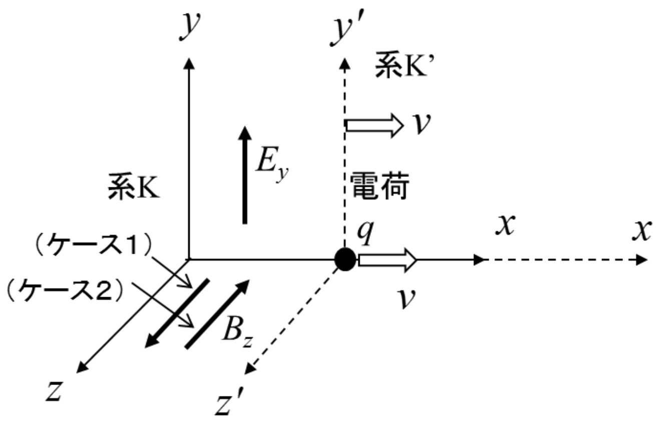

図１　速度 v で動く電荷と座標系（系 K: 静止系；系 K’: 移動系（電荷と共に動く））

２．座標と電磁界のローレンツ変換

本テーマを定量的に議論するためには、座標変換の知識を必要とする。座標変換にはニュートン力学が規範とするガリレイ変換と相対性理論が規範とするローレンツ変換がある。技術レポート[2]では、座標と電磁界のローレンツ変換について詳しくまとめている。本節はその要約を示す。

図１に示すように、静止している系の座標（K 系）を x,y,z,t で、一定速度 v で動いている系の座標（K'系）を x', y', z', t'で表す。ここでは、移動方向を x 軸方向にしている。ニュートン力学が原理とする座標変換（ガリレイ変換と呼ばれる）は、我々の常識に合っていて

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{3}$$

である。ニュートン力学はガリレイ変換に対して共変性がある、ということになる。

ところが、電磁気学の柱となるマックスウェルの方程式は、ガリレイ変換に対して共変性がなく、19 世紀の科学者には、電磁気学は近似の理論と思われていた。この見方を一変させたのはアインシュタインであり、物理現象にはその根底に以下の二つの原理があるとして、それを公理とした力学理論を作り上げた。これが（特殊）相対性理論である。

１）相対性原理（全ての慣性系は同等である）

２）光速度不変の原理（光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる）

１）の原理を満たすためには、２）の原理を受け入れることが必要になる、と読み替えて

も良い。この場合の座標変換は、二つの条件

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad （c\text{: 光速}）$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{4}$$

を満たすように、図 1 の移動系について座標変換（K→K'）すると

$$x'=\gamma(x-vt)$$

$$y'=y,\ \ z'=z$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) \tag{5}$$

$$\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\geq 1$$

が得られる。この変換はローレンツ変換、γはローレンツ因子と呼ばれる。動いているものに対しては、長さが縮み、時間がゆっくり進んでいるように見えるということになる。系 K と K'のローレンツ変換（(5)式）を行列で表すと以下である。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{6}$$

電界と磁束密度のローレンツ変換は次式である（この変換の詳細は[2]にまとめている）。

$$\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \\ E_z' \\ B_x' \\ B_y' \\ B_z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma v/c^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma v/c^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{7}$$

３．慣性系でのローレンツ力

（1）ケース１：バランスは大丈夫？

式(2a)で表されるケース１において、電気力と磁気力のバランスが取れている場合、すなわち、F_y=0 を考える。

$$F_y = 0 \qquad \to \qquad E_y = vB_z \tag{8}$$

これを電荷 q（符号は正）と共に動いている系 K'でみると、電荷に働く力は v=0 なので、磁気力は無く、電気力のみになり、力 F'は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} F_y' &= qE_y' \\ &= q\gamma E_y - qv\gamma B_z \\ &= \gamma F_y = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

このことによって、両系共にバランスが取れており、矛盾がない。

（2）ケース２：時間の進み方

ケース１と同様に、K'系で電荷に働く力 F_y'を求めると、以下になる。

$$\begin{aligned} F_y' &= qE_y' \\ &= q\gamma E_y + qv\gamma B_z \\ &= \gamma F_y \end{aligned} \tag{10}$$

電荷が静止しているときの質量を m_0 とする（注：電荷そのものは質量 0 であるが、帯電している物質に質量がある）。K 系では電荷は動いているので、相対性理論により、その状態での質量はγm_0 である。一方、K'では静止しているので m_0 である。

それぞれに、質量に対して力が働いているのであるから、そこには y 方向に対する加速度場があり、K 系では a_y、K'系では a_y'とする。力学の原理 $F=ma$ より、それぞれの系では

$$F_y = \gamma m_0 a_y, \quad F_y' = m_0 a_y'$$

であるので、両系の加速度 a_y、a_y'は

$$a_y' = \gamma^2 a_y \tag{11}$$

である。

x=x'=0, t=t'=0 で静止質量 m_0 の電荷が、それぞれ、微小時間Δt, $\Delta t'$後に、加速度方向（y 軸方向）へ動く距離をΔl_y、$\Delta l_y'$とするとき、それぞれ以下の位置になる。

$$\Delta l_y = \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2$$

$$\Delta l_y' = \frac{1}{2} a_y' (\Delta t')^2 = \frac{1}{2} \gamma^2 a_y (\Delta t')^2$$

ここで、微小時間、微小距離としているのは、時間を長くとると、電荷の動きの向きが x 方向からずれてきて、発生する力の向き（＝加速度方向の向き）が変わってしまい、それを避けるためである。

それぞれの系の物差しでΔl_y=$\Delta l_y'$となる時間を計ると、

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t \tag{12}$$

となる。

式(6)で時間と空間のローレンツ変換を見ると、Δt と$\Delta t'$の関係については

$$\begin{aligned}\Delta t' &= -\frac{\gamma v}{c^2} \Delta x + \gamma \Delta t \\ &= -\frac{\gamma v^2}{c^2} \Delta t + \gamma \Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t \end{aligned} \tag{13}$$

となって、(12)式と一致している。動いている人の系の時間を、静止系の時計で見ると時間の進み方が遅いと言うことを意味している。これは相対性理論が教えてくれている事実そのものである。

このようにして、ローレンツ力に関する力学的振る舞いを相対論視点で見ると辻褄が合っていて、電磁気学のからくりの一端に触れることができるであろう。

参考文献

[1] R.P.ファインマン, R.B.レイトン, M.L.サンズ:（宮島龍興訳）, *ファインマン物理学 III 電磁気学*（§15-6）, 岩波書店, 1969.

[2] 唐沢好男, “電磁気学の奥深さ（４）：マクスウェル方程式のローレンツ変換,” 技術報告（私報）, TR-YK-026, 2019.07. http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR-YK-026_EM-4.pdf